*

Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner

*

Morten Harboe Rognes

2016

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner

§1 Innledning

I det følgende skal vi studere to typer av mengdeteoretiske strukturer. Den første er en art strukturer som vi skal kalle for *preordningsstrukturer*. En preordning over et ikke-tomt domenet D er en refleksiv og transitiv relasjon over D. En preordningsstruktur er et ordnet par <D,R> der D er en ikke-tom mengde og R en preordning over D. Den andre typen av strukturer skal vi kalle for *akseptansestrukturer*. En akseptansestruktur er et ordnet par <D,B> der D er en ikke-tom mengde og B er det vi skal kalle en sterk akseptanserelasjon over D. Hva som menes med en akseptanserelasjon over domenet D og hva som menes med en sterk akseptanserelasjon over D vil bli definert presist i §3.

Det er imidlertid på dette punkt viktig å klargjøre ytterligere hva som forstås med en akseptanserelasjon i den abstrakte betydningen vi vil operere med her.

I Rognes [5] studerte vi en relasjon mellom utsagn. Denne relasjonen besto mellom to utsagn x og y hvis og bare hvis det er rasjonelt å akseptere at utsagnet x er sant gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har. I det nevnte arbeidet betegnet vi denne relasjonen med "Ba". Det karakteristiske ved denne relasjonen Ba er at dersom y er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere noe relativt til så utgjør mengden av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til y en utsagnsmengde som for det første inkluderer y, som videre er konsistent og som i tillegg er lukket under uendelig konjunksjon og implikasjon. En relasjon som har disse trekkene er hva vi her vil kalle en akseptanserelasjon.

En akseptanserelasjon B over en mengde D er en relasjon som har lignende egenskaper. For det første er det en relasjon som er inkludert i kryssproduktet til potensmengden til D. For det andre krever vi at dersom y er en delmengde av D og det finnes en delmengde z av D slik at <z,y> er med i B så skal mengden av alle de x som er slik at <x,y> er med i B ha de følgende egenskaper: Mengden skal være lukket under uendelig snitt og den skal inneholde y. Den skal dessuten være lukket under inklusjon i den forstand at dersom a er med i mengden og b er en delmengde av D der a er inkludert i b, så skal også b være med i mengden. Endelig kreves at mengden er konsistent i den betydning at om en mengde a er med i mengden så er ikke komplementet til a med hensyn på D med i mengden.

Som nevnt vil den formelle definisjonen av hva som menes med en akseptanserelasjon B over domenet D bli gitt i §3. Man ser imidlertid at dersom B er en akseptanserelasjon over D i den betydningen vi nå har forklart har den sterke strukturelle likhetstrekk med relasjonen Ba som vi studerte i Rognes [5]. Det er av denne grunn at vi omtaler denne typen relasjoner for akseptanserelasjoner.

I forbindelse med preordningsstrukturer og akseptansestrukturer definerer vi to begreper.

Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Da definerer vi presist hva som menes med den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R>. Selve definisjonen er gitt i §5. Man kan vise at den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av en preordningsstruktur over domenet D faktisk er en akseptansestruktur over dette domenet. Fra selve definisjonen fremgår det også

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

at den er entydig bestemt.

Omvendt definerer vi hva som menes med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av akseptansestrukturen <D,B>. Også i denne forbindelse kan man vise at den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av en akseptansestruktur er entydig bestemt og at den faktisk er en preordningsstruktur.

La oss nå gjøre rede for hovedresultatet i dette skrift. La D være en ikke-tom mengde. Da betegner vi mengden av alle preordningsstrukturer <D',R> der D'=D med S(D). Tilsvarende betegner vi mengen av alle akseptansestrukturer <D',B> der D'=D med H(D). Anta x er et element i S(D). Da betegner vi den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av x med h(x). Man kan lett vise at h er en funksjon der domenet er S(D) og at h avbilder S(D) inn i H(D). Anta på den annen side at y er et element i H(D). Da betegner vi den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av y med j(y). Man kan vise at j er en funksjon med H(D) som domene og som avbilder H(D) inn i S(D). Hva man ytterligere kan vise er at dersom x er et vilkårlig element i S(D) har man at j(h(x)) =x, og dersom y er et vilkårlig element i H(D) har man at h(j(y))=y. Fra dette følger at h ikke bare er en funksjon som avbilder S(D) inn i H(D), men er en en-entydig funksjon som avbilder S(D) *på* H(D). Tilsvarende følger at j er en en-entydig funksjon som avbilder H(D) *på* S(D). Et korrolar til dette er at j er den omvendte funksjon av h og h den omvendte funksjon av j.

Dette er hovedresultatet i dette skrift og det meste av det vi gjør på de følgende sider er å gi et bevis for dette resultat.

I forbindelse med preordninger og preordningsstrukturer definerer vi også en type strukturer som vi kaller *strenge preordningsstrukturer*. En streng preordningsstruktur over mengden D er et trippel <D,E,R> hvor det er ikke-tom mengde, E en partisjon av D og R er irrefleksiv og transitiv relasjon over E. Det er en nær sammenheng mellom preordningsstrukturer og strenge preordningsstrukturer. Gitt at <D,R> er en preordningsstruktur definerer vi hva som menes med den kanoniske strenge preordnings-strukturen bestemt av <D,R>. Omvendt, er <D,E,R> en streng preordningsstruktur definerer vi hva som menes med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,E,R>. La oss som ovenfor betegne mengden av alle preordningsstrukturer over D med S(D). Mengden av alle strenge preordningsstrukturer over D betegner vi med S'(D). Er nå x et element i S(D) betegner vi den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av x med f(x). Man kan vise at f er en funksjon som avbilder S(D) inn i S'(D). Er på den annen side y et vilkårlig element i S'(D) betegner vi den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av y med g(y). Man kan vise at g er en funksjon som avbilder S'(D) inn i S(D). Nå er det også i forbindelse med de strukturene vi her omtaler slik at dersom x er et vilkårlig element i S(D) har man at g(f(x)) =x og at dersom y er et vilkårlig element i S'(D) har man f(g(y))=y. Ved hjelp av dette kan man utlede at f og g er en-entydige funksjoner, at f avbilder S(D) en-entydig på S'(D) og at g avbilder S'(D) en-entydig på S(D).

Dette er det andre resultatet i dette skrift som vi finner er av såpass stor interesse at det er hensiktsmessig å gi et detaljert bevis for det.

§2 Notasjon

I det følgende vil vi bruke den notasjon som det er gjort rede for i Rognes [1], [2] og som forøvrig brukes i Rognes [3], [4] og [5]. Vi minner imidlertid om følgende forhold: De vanlige setningslogiske konnektivene, konjunksjon, disjunksjon og negasjon betegnes med

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

henholdvis &, v og ¬. Konnektivene kondisjonal og bikondisjonal betegnes med henholdsvis → og ↔. Når det gjelder kvantorene benytter vi A som symbol for allkvantoren og E som symbol for eksistenskvantoren. Dette innebærer at uttrykket "(Ax)" leses "For alle x er det slik at" og at uttrykket "(Ex)" leses som "Det eksisterer minst ett objekt x slik at". Er D en mengde og x,y delmengder av D betegner x-y, xΩy, xUy henholdsvis komplementet til x med hensyn på y, snittet av x og y og unionen av x og y. Det bør spesielt noteres at vi bruker uttrykket "Mg(x: α)", som leses "mengden av alle de x som er slik at α", for mengdeabstraksjonstermer. En mer vanlig notasjon er "{x: α}". Medlemskapsrelasjonen betegner vi med "ê". En formel av typen "xêy" leses derfor "x er et element i menden y". Det bør også bemerkes at vi betegner inklusjonsrelasjonen mellom mengder med "Inkl". Uttrykket " x Inkl y" må derfor leses " x er inkludert i y". Er Δ Inkl Pt(D) betegner SN(Δ) snittet av alle mengdene i Δ. Uttrykket er definert slik: SN(Δ) = Mg(x: (Ay)(yêΔ → xêy)). UN(Δ) betegner unionen av mengdene i Δ. De variabeltegnene vi bruker vil være x, y, z, v, w osv. og de vil brukes generelt. Av og til vil vi imidlertid, slik som ovenfor bruke Δ, Γ og lignende uttrykk for mengder av mengder. Konteksten skulle da gjøre det helt klart hva det er som menes.

§3 Akseptansestrukturer

Vi har allerede gitt en uformell definisjon av hva vi forstår ved en akseptanserelasjon over et ikke-tomt domene D. Det følgende er den presise, formelle definisjonen av dette begrepet:

Definisjon 3.1: Vi kaller B for en akseptanserelasjon over mengden D hvis og bare hvis B oppfyller følgende krav:

(i) B Inkl Pt(D)XPt(D) & D≠ø
(ii) B(x,y) → ¬B(D-x,y)
(iii) B(x,y) → B(y,y)
(iv) B(x,y) & x Inkl z &zêPt(D)→ B(z,x)
(v) ø≠Δ Inkl Pt(D) & (Ax)(xêΔ → B(x,y)) → B(SN(Δ),y)

Er B en akseptanserelasjon over mengden D skal vi tillate oss å lese formler av typen "B(x,y)" slik: "Mengden x er B-akseptabel relativt til mengden y".

Er B en akseptanserelasjon over D og x en delmengde av D kaller vi snittet av alle de delmengder y av D der y er B-akseptabel relativt til x for den *svake kjernen til x relativt til B* og betegner denne med "γ(x)". Strengt tatt burde vi her brukt uttrykket "γ;B(x)" for å vise at kjernen til en mengde alltid er relativt til en akseptanserelasjon over et domene. I praksis sløyfer vi indeksen B fordi det alltid av sammenhengen vil fremgå hvilken akseptanserelasjon det er tale om. Den formelle definisjonen av γ formulerer vi derfor slik:

Definisjon 3.2: Anta D er en ikke-tom mengde, xêPt(D) og at B er en akseptanserelasjon over D. Da setter vi:
(i) γ(x) = SN(Mg(y: B(y,x)))

Det følgende teorem sammenfatter endel elementære egenskaper til en akseptanserelasjon

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

over mengden D:

Teorem 3.1: Anta B er en akseptanserelasjon over D. Da gjelder om x,y,zêPt(D).

(i) $\emptyset \neq \alpha$ Inkl Pt(D) & B(SN(α),y) → (Ax)(xêα → B(x,y))
(ii) B(x,y) & B(z,y) ↔ B(xΩz,y)
(iii) B(x,y) → $x\Omega y \neq \emptyset$
(iv) B(x,y) → B(γ(y),y)
(v) B(x,y) → γ(y) Inkl y
(vi) B(x,y) → $\gamma(y) \neq \emptyset$
(vii) (Ez)B(z,y) → . B(x,y) ↔ γ(y) Inkl x
(viii) B(z,y) ↔. (Er)B(r,y) & γ(y) Inkl z

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) $\emptyset \neq \alpha$ Inkl Pt(D) & B(SN(α),y) og anta for vilkårlig x at (2) xêα. Ved hjelp av definisjonen av SN(α) følger det da at SNu(α) Inkl x. Fra dette, den andre konjunkten i (1), forutsetningen om at B er en akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.1 (iv) følger umiddelbart at B(x,y). Siden x var et vilkårlig objekt som oppfylte betingelsen (2) følger det at vi har (Ax)(xêα → B(x,y))

Ad (ii): Setter man α={x,z} i (i) og noterer at SN({x,z}) = xΩz har man (1) B(xΩz,y) → B(x,y) & B(z,y). Fra forutsetningen om at B er en akseptanserelsjon over D og Definisjon 3.1 (v) følger (2) B(x,y) & B(z,y). → B(xΩz,y) om vi setter Δ={x,z}. Fra (1) og (2) følger så det vi ønsker.

Ad (iii): Anta (1) B(x,y) og anta for reduktio ad absurdum at (2) $x\Omega y=\emptyset$. Fra det siste følger umiddelbart at (3) y Inkl (D - x). Fra (1) og forutsetningen om at B er en akseptanserelasjon følger B(y,y). Dette, (3), forutsetningen og Definisjon 3.1(iv) impliserer (4) B(D-x,y). Men fra (1), forutsetningen om at B er en akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.1 følger ¬B(D-x,y). Dette strider åpenbart mot (4). Det følger at (2) ikke holder, med andre ord at $x\Omega y \neq \emptyset$. Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Sett per definisjon (1) α = Mg(x:B(x,y)) og anta (2) B(z,y). Fra (1) og (2) følger: (3) $\emptyset \neq \alpha$ Inkl Pt(D). Anta nå for vilkårlig r at rêα. Da følger ved hjelp av (1) at B(r,y). Siden r er vilkårlig har vi derfor: (4) (Ar)(rêα → B(r,y)). Men fra (3), (4), det faktum at B er en akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.1 (v) følger da B(SN(α),y). Fra dette og (1) kan vi så slutte: B(SN(Mg(x:B(x,y))),y). Men herav følger B(γ(y),y) i lys av definisjonen av γ.

Ad (v): Anta (1) B(z,y). Da har vi ved hjelp forutsetningen om at B er en akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.1 at (2) B(y,y). Dette impliserer at yêMg(z: B(z,y)). Fra dette følger umiddelbart ved hjelp av definisjonene av SN at SN(Mg(z: B(z,y)) Inkl y. I lys av definisjonen av γ som ble gitt ovenfor kan man da slutte at γ(y) Inkl y.

Ad (vi): Beviset er igjen meget enkelt: Anta (1) B(z,y) . Vi ønsker å vise $\gamma(y) \neq \emptyset$. Fra (1) og punkt (iv) kan man slutte at B(γ(y),y). Men herav kan vi ved hjelp av punkt (iii) slutte $\gamma(y) \neq \emptyset$.

Ad (vii): (a) Vi må først vise (1) (Ez)B(z,y) → (B(x,y) → γ(y) Inkl x. Siden B(x,y) impliserer (Ez)B(z,y) er det nok å vise (2) B(x,y) → γ(y) Inkl x. Anta derfor (3) B(x,y). Da har vi xêMg(r: B(r,y)). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av SN at (4) SN(Mg(r: B(r,y)) Inkl x. Fra (4) og definisjonen av γ følger så γ(y) Inkl x. Dette viser at (2) og derfor (1) holder.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(b) Det må også bevises at (5) (Ez)B(z,y) & γ(y) Inkl x → B(x,y). Anta derfor (6) (Ez)B(z,y) & γ(y) Inkl x. Fra den første konjunkten i (6) og punkt (iv) følger (7) B(γ(y),y). Fra den andre konjunkten i (6) og (7) følger så det vi ønsker nemlig B(z,y) ved hjelp av forutsetningen om at B er en akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.1.

Ad (viii): Dette følger fra punkt (vii) ved hjelp av ren setningslogikk og det faktum at B(x,y) impliserer (Ez)B(z,y). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Ovenfor definerte vi hva som mentes med den svake kjernen til en mengde x. Anta nå at at B er en akseptanserelasjon over mengden D og at x er en delmengde av D. Da definerer vi *kjernen til mengden* x, i symboler "κ(x)" slik:

Definisjon 3.3: Anta D er en ikke-tom mengde, xêPt(D) og at B er en akseptanserelasjon over D. Da setter vi:

(i) κ(x) = Mg(z: zêD & (Ey)(B(y,x)) & (Ar)(B(r,y) →zêr))

Igjen er det klart at det å snakke om kjernen til en mengde x bare gir mening om en akseptanserelasjon B over et domene D er gitt og x er en delmengde av dette domenet. Men i stedet for å bruke det mer klumsete uttrykket "κ;B(x)" eller "κ(x,B)" tillater vi oss å bruke den kortere skrivemåten fordi det i alle vanlige tilfelle vil fremgå av konteksten hvilken akseptanserelasjon det er vi betrakter.

Det følgende teorem gir viktig informasjon om hvordan den svake kjernen og kjernen til en mengde x er relatert til hverandre forutsatt at B er en akseptanserelasjon over mengden D og xêPt(D):

Teorem 3.2: Anta B er en akseptanserelasjon over D. Da gjelder om x,y,zêPt(D).

(i) κ(y) Inkl γ(y)
(ii) (Ez)B(z,y) ↔ κ(y) ≠ø
(iii) B(x,y) → κ(y) = γ(y)
(iv) B(z,y) ↔. κ(y)≠ø & κ(y) Inkl z

Kommentar: Det siste punktet i dette teoremet er av spesiell interesse. Det viser at mengden z er B-akseptabel relativt til mengden y hvis og bare hvis kjernen til y er ikke-tom og inkludert i z. Forutsetningen er selvfølgelig at B er en akseptanserelasjon over D og at z,y er delmengder av D

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) yêPt(D) og anta for vilkårlig w at (2) wêκ(y). Da har vi i kraft av definisjonen av κ at (3) wêD & (Ez)B(z,y) & (Ax)(B(x,y) → wêx). Sett nå per definisjon: (4) α = Mg(z: B(z,y)). Fra dette og (3) følger (5) wêD & (Ax)(xêα → wêx). Herav har man så at (5) wêMg(w': w'êD & (Ax)(xêα → w'êx)). Men fra dette og definisjonen av SN følger åpenbart: (6) wêSN(α). Herav kan vi så i lys av (4) slutte at wêSN(Mg(z: B(z,y))). Men fra dette og definisjonen av γ følger wêγ(y) som er det vi ønsker. Det viser at (i) holder.

Ad (ii): Anta (1) (Ez)B(z,y). Da følger ved hjelp av Teorem 3.1 at (2) γ(y)≠ø. Fra dette og definisjonen av γ følger så eksistensen av w0 der w0ê SN(Mg(z: B(z,y))). Fra dette og definisjonen av SN følger (3) w0êD & (Az)(B(z,y) → w0êμ(z)). Fra dette og (1) kan man slutte w0êD & (Ex)B(x,y) & (Az)(B(z,y) → w0êμ(z)). Herav har vi hjelp av definisjonen av

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

κ at w0êκ(y). Men da κ(y)≠ø.

På den annen side har man om κ(y)≠ ø at wêκ(y) for noe w. Fra dette og definisjonen av κ følger så (Ex)B(x,y). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii): Anta (1) B(x,y). Det vil være tilstrekkelig å vise (*) κ(y) = γ(y). Inklusjonen mot høyre i (*) følger fra punkt (i). Det vil derfor være nok å vise at (2) γ(y) Inkl κ(y). Anta derfor for vilkårlig w at (3) wêγ(y). Da følger ved hjelp av definisjonen av γ at (4) wêD & (Ax)(B(x,y) → wêx). Fra dette og (1) kan man slutte: wêD & (Ez)B(z,y)& (Ax)(B(x,y) → wêμ(x)). Fra dette følger i sin tur ved hjelp av definisjonen av κ at wêκ(y). Siden w var vilkårlig objekt som oppfylte (3) kan man konkludere med at γ(y) Inkl κ(y). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre. Anta (1) B(z,y). Da har man selvfølgelig at (2) (Er)B(r,y). Fra dette og Teorem 3.1, punkt (vi) kan man slutte (3) κ(y) ≠ø. Fra (1) og Teorem 3.1 følger γ(y) Inkl z. Fra dette, (1) og punkt (iii) ovenfor følger (4) κ(y) Inkl z. Vi har altså fra (3) og (4) at ø≠κ(y) & κ(y) Inkl z. Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

La oss se på kondisjonalen mot venstre: Anta (5) ø≠κ(y) & κ(y) Inkl z Fra den første konjunkten i (5) og punkt (ii) ovenfor følger (6) (Er)B(r,y). Fra dette og punkt (iii) følger (7) κ(y) = γ(y). Fra dette og (5) kan man slutte (7) γ(y) Inkl z. Fra (6), (7) og Teorem 3.1, punkt (vii), følger så B(z,y).

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Anta B er en akseptanserelasjon over en ikke-tom mengde D og at y er en delmengde av D. Da definerer vi hva som menes med at y *representerer et enkelhetsnivå*, i symboler "η(y)" på den følgende måte:

Definisjon 3.4: Anta D er en ikke-tom mengde, yêPt(D) og at B er en akseptanserelasjon over D. Da setter vi:

(i) η(y) ↔ [yêPt(D) & κ(y)≠ø &
(Az)(zêPt(D) &κ(z)Ωκ(y) ≠ø → κ(z) Inkl κ(y)) & yΩκ(y) = y]

Gitt de forutsetningene som er angitt i definisjonen vil en mengde y representere et enkelhetsnivå hvis og bare hvis y oppfyller de følgende tre krav: for det første må kjernen til y være ikke-tom, for det andre må enhver delmengde z av D som har en kjerne som overlapper med kjernen til y være slik kjernen til z er inkludert i kjernen til y, og endelig må mengden y være inkludert i sin egen kjerne.

Anta B er en akseptanserelasjon over den ikke-tomme mengden D. Er da x,y elementer i D sier vi at x er B-ekvivalent med y, i symboler "e;B(x,y)" hvis og bare hvis det finnes en delmengde z av D som representerer et enkelhetsnivå og der x og y begge er elementer i z. Videre sier vi at x er B-bedre enn y, i symboler "r;B(x.y) hvis og bare hvis det finnes to disjunkte enkelhetsnivåer r og q der vi har xêr og yêq og kjernen til unionen av r og q er identisk med r. Endelig sier vi at x er minst like bra som y relativt til B , i symboler "r*;B(x,y)" hvis og bare hvis det enten er slik at x er B-ekvivalent med y eller x er B-bedre enn y. Vi definerer disse uttrykkene formelt ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.5: Anta D er en ikke-tom mengde, at B er en akseptanserelasjon over mengden

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

D, at x,yêD og at aêPt(D). Da setter vi:

(a) $e;B(x,y) \leftrightarrow . (Ez)(\eta(z) \& x,y\hat{e}z)$

(b) $r;B(x,y) \leftrightarrow . (Er)(Eq)(\eta(r) \& \eta(q) \& r\Omega q=\emptyset \& x\hat{e}r \& y\hat{e}q \& \kappa(rUq)=r)$

(c) $r^*;B(x,y) \leftrightarrow . e;B(x,y) \vee r;B(x,y)$

Anta R er en relasjon over en ikke-tom mengde D og at a er en delmengde av D. Da setter vi:

(d) $Max(R, a) = Mg(z: z\hat{e}a \& (Av)(v\hat{e}a \rightarrow R(z,v)))$

Kommentar: Er R en relasjon over en ikke-tom mengde D og a en delmengde av D kaller vi Max(R,a) for mengden av de R-maksimale elementene i a. Dette er de elementene i a som bærer relasjonen R til ethvert element i a.

Det følgende teorem viser at dersom B er en akseptanserelasjon over en ikke-tom mengde D vil alltid to overlappende mengder som representerer enkelhetsnivåer bestemt av B være identiske.

Teorem 3.3: Anta D er en ikke-tom mengde, x,yêPt(D) og at B er en akseptanserelasjon over D. Da gjelder følgende:

$\eta(x) \& \eta(y) \& x\Omega y\neq\emptyset \rightarrow x=y$

Bevis: Anta (1) $\eta(x) \& \eta(y) \& x\Omega y\neq\emptyset$. Fra den første konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av η:

(1.1) $x\hat{e}Pt(D) \& \kappa(x)\neq\emptyset$

(1.2) $(Az)(z\hat{e}Pt(D) \& \kappa(z)\Omega\kappa(x) \neq\emptyset \rightarrow \kappa(z)$ Inkl $\kappa(x))$

(1.3) $x\Omega\kappa(x) = x$

Tilsvarende følger fra den andre konjunkten i (1):

(2.1) $y\hat{e}Pt(D) \& \kappa(y)\neq\emptyset$

(2.2) $(Az)(z\hat{e}Pt(D) \& \kappa(z)\Omega\kappa(y) \neq\emptyset \rightarrow \kappa(z)$ Inkl $\kappa(y))$

(2.3) $y\Omega\kappa(y) = y$

Siden $\kappa(x)\neq\emptyset$ følger ved hjelp av Teorem 3.2, punkt (ii) at (Er)B(r,x). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 3.1, punkt (v), at $\gamma(x)$ Inkl x. Siden (Er)B(r,x) har vi imidlertid også $\kappa(x)=\gamma(x)$ ved hjelp av Teorem 3.2, punkt (iii). Det følger derfor at $\kappa(x)$ Inkl x. Fra dette og (1.3) følger:

(3.1) $\kappa(x)=x$

På helt tilsvarende vis kan man ved hjelp av (2.3) utlede

(3.2) $\kappa(y)=y$

Fra (1), (3.1) og (3.2) følger (4) $\kappa(x)\Omega\kappa(y)\neq\emptyset$

Fra (4) og (1.2) kan man slutte (5) $\kappa(y)$ Inkl $\kappa(x)$. Tilsvarende kan fra (2.2) og (4) slutte (6) $\kappa(x)$ Inkl $\kappa(y)$. Fra (5) og (6) har vi $\kappa(x) = \kappa(y)$. Fra dette, (3.1) og (3.2) følger imidlertid x=y som er hva vi ønsker. **QED**.

Vi definerte ovenfor hva som mentes med en akseptanserelasjon over D. Med en sterk akseptanserelasjon over D forstår vi en akseptanserelasjon over D som ikke bare oppfyller kravene i Definisjon 3.1 ovenfor, men også de fire kravene (ii) - (iv) som er nevnt i den følgende definisjon:

Definisjon 3.6: Med en sterk akseptanserelasjon B over mengden D forstås en en relasjon B over D som oppfyller følgende krav:

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(i) B er en akseptanserelasjon over D
(ii) $(Az)(z\hat{e}D \rightarrow (Ey)(y\hat{e}Pt(D) \& z\hat{e}\eta(y))$
(iii) $x,y,z\hat{e}Pt(D) \& \eta(x) \& \eta(y) \& \eta(z) \& x\neq y \& y\neq z \& \kappa(xUy)=x \& \kappa(yUz)=y \rightarrow \kappa(xUz)=x$
(iv) $y\hat{e}Pt(D) \& z\hat{e}(y\text{-}\kappa(y)) \& x\hat{e}\kappa(y) \rightarrow (Es)(Eq)(\eta(s)\&\eta(q) \& x\hat{e}s \&z\hat{e}q \& s\Omega q=\emptyset \& \kappa(sUq)=s)$
(v) $y\hat{e}Pt(D) \rightarrow. \ Max(r^*;B,y)\neq\emptyset \rightarrow \kappa(y)\neq\emptyset$

Det følgende teorem viser at dersom B er en sterk akseptanserelasjon over mengden D, og z er en delmengde av D med en ikke-tom kjerne, så vil kjernen til z være inkludert i en delmengde y av D som representerer et enkelhetsnivå:

Teorem 3.4: Anta D er en ikke-tom mengde og at B er en sterk akseptanserelasjon over mengden D. Da gjelder:
$z\hat{e}Pt(D) \&\kappa(z)\neq\emptyset \rightarrow (Ey)(\eta(y) \& \kappa(z)$ Inkl $y)$

Bevis: Anta (1) $z\hat{e}Pt(D) \& \kappa(z)\neq\emptyset$. Da finnes $w0\hat{e}D$ slik at (2) $w0\hat{e}\kappa(z)$. Fra dette, forutsetningen om at B er en sterk akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.6, punkt (ii), kan man slutte at det finnes y slik at (3) $\eta(y) \& w0\hat{e}y$. Fra den første konjunkten i (3) og definisjonen av η kan man slutte:
(4.1) $(Az)(z\hat{e}Pt(D) \& \kappa(z)\Omega\kappa(y)\neq\emptyset \rightarrow \kappa(z)$ Inkl $\kappa(y))$ og
(4.2) $y\Omega\ \kappa(y) = y$
Fra (3) og (4.2) følger $w0\hat{e}\kappa(y)$. Dette og (2) impliserer $\kappa(z)\Omega\kappa(y)\neq\emptyset$. Herav følger ved hjelp av (4.1) at (5) $\kappa(z)$ Inkl $\kappa(y)$. Fra (3) og definisjonen av η følger også:
(6) $\kappa(y)\neq\emptyset$. Da følger ved hjelp av Teorem 3.2, punkt (ii) at $(Er)B(r,y)$. Fra dette følger ved hjelp av Teorem 3.1, punkt (v), at $\gamma(y)$ Inkl y. Siden $(Er)B(r,x)$ har vi imidlertid også $\kappa(y)=\gamma(y)$ ved hjelp av Teorem 3.2, punkt (iii). Det følger derfor at $\kappa(y)$ Inkl y. Fra dette og (5) kan man slutte: (7) $\kappa(z)$ Inkl y. Men fra dette og (3) følger $(Ey)(\eta(y) \& \kappa(z)$ Inkl $y)$.
QED.

Det følgende teorem viser at dersom B er en sterk akseptanserelasjon over mengden D så er relasjonen e;B, som vi definerte ovenfor, en ekvivalensrelasjon over D. Videre vil r;B være en irrefleksiv og transitiv relasjon over D som oppfyller kravene (iv) og (v) i teoremet. Det er forøvrig ikke så vanskelig å innse at dette teoremet impliserer at dersom B er en sterk akseptanserelasjon over D så er r*;B en preordning over D.

Teorem 3.5: Anta D er en ikke-tom mengde, at B er en sterk akseptanserelasjon over mengden D og at $x,y,z\ \hat{e}D$. Da har vi:
(i) $e;B(x,x)$
(ii) $e;B(x,y) \rightarrow e;B(y,x)$
(iii) $e;B(x,y) \& e;B(y,z) \rightarrow e;B(x,z)$
(iv) $e;B(x,y) \& r;B(y,z) \rightarrow r;B(x,z)$
(v) $e;B(x,y) \& r;B(z,y) \rightarrow r;B(z,x)$
(vi) $\neg\ r;B(x,x)$
(vii) $r;B(x,y) \& r;B(y,z) \rightarrow r;B(x,z)$

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Bevis: *Ad (i)*: Anta xêPt(D). Ved hjelp av aksiom B6 følger da (Ey)(η(y) & xêy). Men fra dette og definisjonen av e;B følger umiddelbart e;B(x,x).

Ad (ii): Anta (1) e;B(x,y). Fra definisjonen av e;B kan man da slutte:
x,yêD & (Ez)(η(z) & x,y êz). Men fra dette følger åpenbart y,x êD & (Ez)(η(z) & y,xêz).
Herav kan man så ved hjelp av definisjonen av e;B slutte e;B(y,x).

Ad (iii): Anta (1) e;B(x,y) & e;B(y,z). Fra dette og definisjonen av e;B kan man slutte:
(2.1) x,yêD & η(q) & x,y êq for noe qêPt(D)
(2.2) y,zêD & η(s) & y,z ês for noe sêPt(D)
Det følger at yê(qΩs) og derfor (3) qΩs≠ø. Siden vi har η(q) & η(s) kan man da ved hjelp av Teorem 3.3 slutte at q=s. Fra dette, (2.1) og (2.2) følger da x,zêq & η(q). Herav kan man så ved hjelp av definisjonen av e;B slutte e;B(x,z). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Anta (1) e;B(x,y) & r;B(y,z). Fra den siste konjunkten i (1) og definisjonen av r;B følger eksistensen av q,s slik at
(2.1) y,zêD
(2.2) η(q) &η(s) & yêq &zês
(2.3) qΩs=ø & κ(qUs)=q
Fra den første konjunkten i (1) og definisjonen av e;B kan vi slutte at det finnes r slik at
(3.1) η(r) & x,yêr
Siden det følger fra (2.2) og (3.1) at yêq & yêr følger det at (4) qΩr≠ø. Fra (2.2) og (3.1) følger også (5) η(q) & η(r). Fra (4), (5) og Teorem 3.3 kan vi da slutte at (6) q=r.
Fra dette, (2.2), (2.3) og (3.1) kan man slutte:
(7.1) η(r) &η(s) & xêr & zês
(7.2) rΩs≠ø & κ(rUs)=r
Men siden x,zêD i lys av den første konjunkten i (1) kan man fra (7.1), (7.2) og definisjonen av r;B slutte at r;B(x,z). Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Anta (1) e;B(x,y) & r;B(z,y) Vi ønsker å vise at r;B(z,x). Fra den første konjunkten i (1) kan man slutte at det finnes r der man har
(2) x,yêD & η(r) & x,yêr
Fra den andre konjunkten i (1) og definisjonen av r;B følger eksistensen av q og s der
(3.1) z,yêD
(3.2) η(q) &η(s) & zêq &yês
(3.3) qΩs=ø & κ(qUs)=q
Fra (2) og (3.2) følger yês &yêr. Derfor sΩr≠ø. Siden η(s) &η(r) kan vi derfor ved hjelp av Teorem 3.3 slutte s=r. Fra dette, (2) og (3.1) - (3.3) følger:
(4.1) z,xêD
(4.2) η(q) & η(r) & zêq & xêr
(4.3) qΩr=ø & κ(qUr)=q
Fra (4.1) - (4.3) og definisjonen av r;B følger så r;B(z,x). Dette viser at punkt (v) holder.

Ad (vi): Fra definisjonen av r;B følger umidelbart for alle x,yêD at
r;B(x,y) →x≠y. Herav har man at x=y → ¬(e;B(x,y)) for alle x,yêD. Det følger umiddelbart fra dette at (Ax)(xêD → ¬(e;B(x,x))). Følgelig har vi ¬ e;B(x,x) siden det forutsettes at xêD.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Dette viser at punkt (vi) holder.

Ad (vii): Anta (1) r;B(x,y) og (2) r;B(y,z). Fra (1) og definisjonen av r;B har vi at det finnes q,r der:

(3) $\eta(q) \,\&\, \eta(r) \,\&\, x \hat{e} q \,\&\, y \hat{e} r \,\&\, q \Omega r = \emptyset \,\&\, \kappa(qUr) = q$

Tilsvarende følger fra (2) at det finnes s,t der vi har:

(4) $\eta(s) \,\&\, \eta(t) \,\&\, y \hat{e} s \,\&\, z \hat{e} t \,\&\, s \Omega t = \emptyset \,\&\, \kappa(sUt) = s$

Siden $y \hat{e} r \,\&\, y \hat{e} s$ følger det at $r \Omega s \neq \emptyset$. Fra dette og det forhold at $\eta(r)$ og $\eta(s)$ kan man ved hjelp av Teorem 3.3 slutte at (5) r=s. Fra dette, (3) og (4) kan man derfor slutte:

(5.1) $\kappa(qUr) = q$

(5.2) $\kappa(rUt) = r$

Siden vi har $\eta(q) \,\&\, \eta(r) \,\&\, \eta(t) \,\&\, q \neq r \,\&\, r \neq t$ kan man fra (5.1), (5.2), forutsetningen at B er en sterk akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.6, punkt (iii) slutte at

(6.1) $\kappa(qUt) = q$

Videre har vi fra (3) og (4) at $\eta(q) \,\&\, \eta(t) \,\&\, x \hat{e} q \,\&\, z \hat{e} t$. Det vil nå være tilstrekkelig å bevise: (7) $q \Omega t = \emptyset$. Anta for reduktio ad absurdum at det motsatte er tilfelle. Siden $\eta(q)$ og $\eta(t)$ har vi da ved hjelp av Teorem 3.3 slutte at q=t. Fra dette, (5.1) og (5.2) følger:

$\kappa(qUr) = q \,\&\, \kappa(rUq) = r$

Men dette er umulig i lys av (3) som impliserer at $q \Omega r = \emptyset$ og det at $\eta(q)$ og $\eta(r)$ impliserer at $q \neq \emptyset \,\&\, r \neq \emptyset$. Det følger at (7) holder og derfor at e;B(x,z). Dette viser at punkt (vii) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Som det etterhvert vil fremgå er det følgende teorem viktig. Det sier at dersom B er en sterk akseptanserelasjon over mengden D og y en delmengde av D så er mengden av r*;B-maksimale elementer i y identisk med kjernen til y.

Teorem 3.6: Anta D er en ikke-tom mengde, at B er en sterk akseptanserelasjon over mengden D og at $y \hat{e} Pt(D)$. Da har man:

$$Max(r^*;B, y) = \kappa(y)$$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Anta (1) $y \hat{e} Pt(D)$.

(a) Vi viser først inklusjonen mot venstre. Anta derfor for vilkårlig x at (2) $x \hat{e} \kappa(y)$. Da har man ved hjelp av forutsetningene og Teorem 3.4 at det finnes t der man har (3) $\kappa(y)$ Inkl t $\,\&\, \eta(t)$. Siden $x \hat{e} \kappa(y)$ har man ved hjelp av definisjonen av κ at (4) $(Ez)B(z,y)$. Fra dette forutsetningene og Definisjon 3.1 og Definisjon 3.6 følger (5) B(y,y). Fra (4), (5) og Teorem 3.2 (iv) kan man da konkludere med at (6) $\kappa(y)$ Inkl y. Fra dette og (2) følger (7) $x \hat{e} y$. Fra (2) og (3) følger (8) $x \hat{e} t$.

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise i lys av (7) og definisjonen av Max, Definisjon 3.5 at

(*) $(Av)(v \hat{e} y \rightarrow (e;B(x,v) \vee r;B(x,v)))$

Anta derfor for vilkårlig v at (9) $v \hat{e} y$. Det er da to muligheter:

Tilfelle (i): $v \hat{e} \kappa(y)$. Da har man ved hjelp av (3) at $v \hat{e} t$. Men fra dette, (2) og (3) følger: $x,v \hat{e} t \,\&\, \eta(t)$. Men ved hjelp av definisjonen av e;B kan man da slutte e;B(x,v). Fra dette følger åpenbart $e;B(x,v) \vee r;B(x,v)$

Tilfelle (ii): $\neg(v \hat{e} \kappa(y))$. Da har man (10) $v \hat{e} (y - \kappa(y))$. Siden B er en sterk akseptanserelasjon over D følger ved hjelp av Definisjon 3.6 (iv) og (2) at

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(Es)(Eq)(η(s)&η(q) & xês &vêq & sΩq=ø & κ(sUq)=s)
Men fra dette og definisjonen av r;B har vi r;B(x,v) og derfor e;B(x,v) v r;B(x,v).

I begge tilfelle har vi e;B(x,v) v r;B(x,v). Siden v var vilkårlig kan man derfor konkludere med at (*) holder. Dette viser inklusjonen mot venstre.

(b) La oss så vise inklusjonen mot høyre. Anta (11) xêMax(r*;B,y). Da har man Max(r*;B,y) ≠ø og derfor i lys av Definisjon 3.6 (v) og (1) at (12) κ(y)≠ø.

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x0 der vi har:

(13) x0êMax(r*;B,y) & ¬ (x0êκ(y)).

Fra den første konjunkten og definisjonen av Max følger x0êy som sammen med den siste konjunkten i (13) impliserer (14) x0ê(y- κ(y)). Fra (12) kan man slutte at det finnes noe x1 der (15) x1êκ(y) Fra (14), (15), forutsetningen at B er en sterk akseptanserelasjon over D og Definisjon 3.6 (iv) følger:

(Es)(Eq)(η(s)&η(q) & x1ês &x0êq & sΩq=ø & κ(sUq)=s)
Fra dette og definisjonen av r;B følger så (16) r;B(x1,x0).

Fra (13) og definisjonen av Max følger:

(17) x0êy & (Av)(vêy → e;B(x0,v) v r;B(x0,v))
Siden vi under punkt (a) viste at κ(y) Inkl Max(r*;B, y) Inkl y følger ved hjelp av (15) at x1êy. Fra dette og (17) kan man så konkludere med at (18) e;B(x0,x1) v r;B(x0,x1)
I begge tilfelle utleder man en motsigelse ved hjelp av Teorem 3.5. Det er altså umulig at det kan finnes noe x0 der (13) holder. Det følger at Max(r*;B,y) Inkl κ(y).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§4 Preordninger og preordningsstrukturer

Vi vender oss nå mot den type relasjoner som kalles for preordninger og det vi her kaller for preordningsstrukturer. Som tidligere nevnt er en preordning over et ikke-tomt domene D en refleksiv og transitiv relasjon over D. En preordningsstruktur er et ordnet par <D,R> der D er en ikke-tom mengde og R en preordning over D. Vi sammenfatter dette i den følgende definisjon:

Definisjon 4.1: (a) Vi sier at relasjonen R er en preordning over mengden D hvis og bare hvis R og D oppfyller de følgende krav:

(i) D≠ø
(ii) R Inkl DxD
(iii) (Ax)(xêD → R(x,x))
(iv) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêD & R(x,y) & R(y,z) → R(x,z)

(b) Et ordnet par <D,R> der R er en preordning over D kaller vi for en preordningsstruktur.

Er R en preordning over D, defineres ekvivalensrelasjonen bestemt av R, Ekv;R, og den strenge preordningen bestemt av R, R*, på den følgende måte:

Definisjon 4.2: Anta R er en preordning over mengden D. Da er R* og Ekv definert ved:

(i) R* = Mg(<x,y>: x,yêD & R(x,y) & ¬R(y,x))
(ii) Ekv;R = Mg(<x,y>: x,yêD & R(x,y) & R(y,x))

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Det følgende teorem viser noen av de grunnleggende egenskapene til relasjonene Ekv;R og R* dersom R er en preordning over mengden D:

Teorem 4.1: Anta <D,R> er en preordningsstruktur og at x,y,z êD. Da har man:

(i) Ekv;R(x,x)
(ii) Ekv;R(x,y) → Ekv;R(y,x)
(iii) Ekv;R(x,y) & Ekv;R(y,z) → Ekv;R(x,z)
(iv) Ekv;R(x,y) & R*(x,z) → R*(y,z)
(v) Ekv;R(x,y) & R*(z,x) → R*(z,y)
(vi) ¬ R*(x,x)
(vii) R*(x,y) & R*(y,z) → R*(x,z)

Bevis: Selvom beviset for denne satsen kan fortone seg svært enkelt gir vi likevel et fullstendig bevis.

Ad (i): Anta xêD. Da har vi siden det følger fra forutsetningene i satsen at R er en preordning over D at (1) R(x,x). Fra dette og Definisjon 4.2 (ii) følger Ekv;R(x,x).

Ad (ii): Anta Ekv;R(x,y). Da følger ved hjelp av definisjonen av Ekv;R at R(x,y) &R(y,x). Fra dette følger i sin tur R(y,x)& R(x,y) som ved hjelp av definisjonen av Ekv;R impliserer EKv;R(y,x). Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii): Anta (1) Ekv;R(x,y) & Ekv;R(y,z). Fra den første konjunkten og definisjonen av Ekv;R følger da (2) R(x,y)&R(y,x). Tilsvarende følger fra den andre konjunkten i (1) at (3) R(y,z)&R(z,y). Siden R er en preordning er den en transitiv relasjon. Det følger derfor fra (2) og (3) at R(x,z) &R(z,y). Herav følger så Ekv;R(x,z) ved hjelp av definisjonen av Ekv;R. Dette viser at (iii) holder.

Ad (iv): Anta (1) Ekv;R(x,y) & R*(x,z). Fra den første konjunkten og definisjonen av Ekv;R følger (2) R(x,y) &R(y,x). Fra den andre konjunkten i (1) og definisjonen av R* følger (3) R(x,z) & ¬R(z,x). Siden R er transitiv har man fra den siste konjunkten i (2) og den første i (3) at (4) R(y,z). Anta mot formodning at R(z,y). Da ville vi ha fra den andre konjunkten i (2) og transitiviteten til R at R(z,x). Men dette strider mot (3). Det følger at (5) ¬R(z,y). Dette, (4) og definisjonen av R* impliserer R*(y,z). Dette viser at (iv) holder.

Ad (v): Anta (1) Ekv;R(x,y) & R*(z,x). Fra den første konjunkten og definisjonen av Ekv;R følger (2) R(x,y) &R(y,x). Fra den andre konjunkten i (1) og definisjonen av R* følger (3) R(z,x) & ¬R(x,z). Siden R er transitiv har man fra den første konjunkten i (2) og den første i (3) at (4) R(z,y). Anta mot formodning at R(y,z). Da ville vi ha fra den første konjunkten i (2) og transitiviteten til R at R(x,z). Men dette strider mot (3). Det følger at (5) ¬R(y,z). Dette, (4) og definisjonen av R* impliserer R*(z,y). Dette viser at (v) holder.

Ad (vi): Anta mot formodning at R*(x,y) & y=x for noe y,xêD. Da ville vi ved hjelp av definisjonen av R* har R(x,y) & ¬R(y,x). Men siden x=y følger da R(x,x)& ¬R(x,x) som er umulig. Vi har derfor (Ax)(Ay)(x,yêD & x=y → ¬R*(x,y)). Men siden xêD & x=x følger herav ¬R*(x,x). Dette viser at punkt (vi) holder.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Ad (vii): Anta (1) R*(x,y) & R*(y,z). Fra dette og definisjonen av R* følger (2) R(x,y) & ¬(R(y,x)) og (3) R(y,z) & ¬ R(z,y). Fra de to første konjunktene i henholdsvis (2) og (3) følger (4) R(x,z) siden R er transitiv. Anta mot formodning at R(z,x). Da følger ved hjelp av første konjunkt i (2) og transitiviteten til R at R(z,y). Men dette strider mot (3). Vi har derfor (5) ¬R(z,x). Fra dette (4) og definisjonen av R* følger R*(x,z). Dette viser at (vii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Er R er en preordning over D, x,y elementer i D og har vi at R(x,y) er det naturlig å si at x er minst like høyt rangert som y relativt til R. R*(x,y) innebærer da at x er høyre rangert enn y relativt til R. Ekv;R(x,y) vil i så fall bety at x og y er likt rangert relativt til R. Det følgende teorem sier at dersom R er en preordningstruktur over mengden D og x,y er elementer i D så har man at x er minst like høyt rangert som y relativt til R hvis og bare hvis x enten er like høyt rangert som y relativt til R eller x er høyere rangert enn y relativt til R:

Teorem 4.2: Anta <D,R> er en preordningsstruktur og at x,y êD. Da har man:
R(x,y) ↔ . Ekv;R(x,y) v R*(x,y)

Bevis: Anta forutsetningene holder. (a) Anta R(x,y). Da er det to muligheter R(y,x) eller ¬R(y,x). I det første tilfelle følger Ekv;R(x,y) i lys av definisjonen av Ekv;R. I det annet har man R*(x,y) ved hjelp av definisjonen av R*. I begge tilfelle har man Ekv;R(x,y) v R*(x,y). Dette viser kondisjonalen mot høyre i teoremet. (b) Anta Ekv;R(x,y) v R*(x,y). I det første tilfelle følger R(x,y) ved hjelp av definisjonen av Ekv;R. I det andre tilfelle følger R(x,y) ved hjelp av definisjonen av R*. I begge tilfelle har man R(x,y). Dette viser at kondisjonalen mot venstre i teoremet holder. **QED**.

Er R en preordning over mengden D og x en delmengde av D er mengden av de R-maksimale elementene i x, Max(R,x), identisk med mengden av alle de elementer z som er med i x som er slik at z er minst like høyt rangert som y relativt til R for ethvert element y i x. Denne definisjonen kan presist formuleres slik:

Definisjon 4.3: Anta <D,R> er en preordningsstruktur og at x êPt(D). Da setter vi:
Max(R,x) = Mg(z: zêx & (Ay)(yêx → R(z,y))

Det følgende teorem oppsummerer en del av de mest iøynefallende egenskapene til denne operatoren Max:

Teorem 4.3: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Anta x,x' êPt(D) og y,z êD. Da har man:

(i) y,z êMax(R,x) → Ekv;R(y,z)
(ii) yêMax(R,x) & Ekv;R(y,z) & zêx. → zêMax(R,x)
(iii) yêMax(R,x) & zê(x-Max(R,x))→R*(y,z)
(iv) Max(R,x)Ω Mg(z: Ekv;R(z,y)) ≠ø &yêD. → Max(R,x) Inkl Mg(z: Ekv;R(z,y))
(v) Ekv;R(y,z) & yêMax(R,x) & zêMax(R,x') →

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Max(R,x) U Max(R,x') Inkl Mg(z: Ekv;R(z,y))

(vi) yêMax(R,x) → Max(R,x) = x Ω Mg(z: Ekv;R(z,y))

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) y,zêMax(R,x). Ved hjelp av definisjonen av Max kan man fra dette slutte:

(2) yêx & (Aw')(w'êx → R(y,w'))

(3) zêx & (Aw')(w'êx → R(z,w'))

Fra den første konjunkten i (2) og den siste konjunkten i (3) følger (4) R(z,y). Tilsvarende følger fra den første konjunkten i (3) og den siste konjunkten i (2) at
(5) R(y,z). Fra (4), (5) og definisjonen av Ekv;R følger så at Ekv;R(y,z).

Ad (ii): Anta (1) yêMax(R,x) & Ekv;R(y,z) & zêx. Fra den første konjunkten i (1) og definisjonen av Max følger:

(2) yêx & (Aw')(w'êx → R(y,w'))

Fra den andre konjunkten i (1) følger (3) R(z,y). Men fra dette, (2) og det faktum at R er en transitiv relasjon følger (Aw')(w'êx → R(z,w')). Siden det forutsettes at zêx har vi derfor ved hjelp av definisjonen av maksimalt element at zêMax(R,x). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii): Anta (1) yêMax(R,x) & zê(x-Max(R,x)). Fra den første konjunkten og definisjonen av Max følger (2) (Aw')(w'êx → R(y,w'). Fra den andre konjunkten i (1) følger zêx som sammen med (2) gir en (3) R(y,z). Anta nå for reduktio ad absurdum at (4) R(z,y). Sammen med (3) og definisjonen av Ekv;R følger da Ekv;R(y,z). Men fra dette (1), punkt (ii) ovenfor og det forhold at zêx følger zêMax(R,x). Men dette strider mot den andre konjunkten i (1). Det følger at (5) ¬R(z,y). Fra (3), (5) og definisjonen av R* kan man da slutte at R*(y,z). Dette viser at satsen holder.

Ad (iv): Anta Max(R,x)Ω Mg(z: Ekv;R(z,y)) ≠ø &yêD. Da kan man slutte at det finnes z0êD slik at (1) z0êMax(R,x) og (2) Ekv;R(z0,y). Anta nå for en vilkårlig z at zêD og at (2) zêMax(R,x). Da har vi i lys av (1) åpenbart at (3) z,z0êMax(R,x). Fra dette og punkt (i) ovenfor kan man slutte at Ekv;e(z,z0). Men fra dette, (2) og det faktum at Ekv;R er en ekvivalensrelasjon i lys av Teorem 4.1 følger at Ekv;R(z,y) og derfor zêMg(w':Ekv;e(w',w)). Siden z var vilkårlig element som oppfylte kravet (2) følger det at
Max(R,x) Inkl Mg(w': Ekv;e(w',y)). Dette viser at satsen holder.

Ad (v): Anta forutsetningene i satsen holder og at

(1) Ekv;R(y,z) & yêMax(R,x) & zêMax(R,x')

Fra de to første konjunktene i (1) og forrige punkt kan man slutte:

(2) Max(R,x) Inkl Mg(x: Ekv;R(x,z)). Fra dette følger, siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon og vi har Ekv;R(y,z) at

(3) Max(R,x) Inkl Mg(x: Ekv;R(x,y))

Fra den første og den siste konjunkten i (1) følger:

(4) zêMax(R;e,x') & zêMg(x: Ekv;R(x,y)). Fra dette og punkt (iv) kan man slutte at (5) Max(R;e,x') Inkl Mg(x: Ekv;R(x,y)). Fra (3) og (5) følger så
Max(R,x) U Max(R,x') Inkl Mg(z: Ekv;R(z,y)). Dette viser at (v) holder.

Ad (vi): Anta (1) yêMax(R,x). Siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon og derfor

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

refleksiv har vi (2) Ekv;R(y,y). Fra dette og (1) følger yêMax(R,x)Ω Mg(z: Ekv;R(z,y)). Fra dette kan vi ved hjelp av punkt (iv) slutte at (4) Max(R,x) Inkl Mg(z: Ekv;e(z,y)) . Siden det følger fra definisjonen av Max at (5) Max(R,x) Inkl x har vi:

(6) Max(R,x) Inkl x ΩMg(z: Ekv;R(z,y))

Dette viser at inklusjonen mot høyre i konsekventen i teoremet holder. Anta på den annen side at zê xΩ Mg(v: Ekv;e(v,y) for vilkårlig z. Da har vi (7) zêx & Ekv;e(z,y). Fra dette (1) og punkt (ii) følger zêMax(R,x). Siden z var vilkårlig kan man slutte at

xΩ Mg(v: Ekv;R(v,y)) Inkl Max(R,x). Dette viser at inklusjonen mot venstre i konsekventen i punkt (vi) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Som man ser fra Teorem 4.1 er Ekv;R en ekvivalensrelasjon over D om R er en preordning over mengden D. Er x et vikårlig element i D betegner vi mengden av alle de elementer v i D som er slik at Ekv;R(v,x) med [x];R. [x];R er altså ekvivalensmengden til x bestemt av ekvivalensrelasjonen Ekv;R. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 4.4: Anta R er en preordning over D. Da setter vi [x];R = Mg(v: Ekv;R(v,x))

En partisjon av en mengde x er en oppdeling av mengden i et knippe ikke-tomme delmengder som innbyrdes er disjunkte og som samlet uttømmer x. Den formelle definisjonen vi gir er denne:

Definisjon 4.5: Anta x er en ikke-tom mengde. Vi kaller da y for en partisjon av mengden x hvis og bare hvis y oppfyller de følgende krav:

(i) y Inkl Pt(x)
(ii) (Az)(zêy → z≠ø)
(iii) (Az)(Aw)(z,v êy &z≠v → zΩv=ø)
(iv) x= UN(Mg(z: zêy))

Ovenfor definerte vi hva som mentes med en preordningsstruktur. Siden vi nå har klarlagt begrepet partisjon, kan vi gå videre og definere hva som menes med *en streng preordningsstruktur*. Dette er et triple <D,E,R> hvor D er en ikke-tom mengde, E en partisjon av D og R en irrefleksiv og transitiv relasjon over E, med andre ord setter vi per defnisjon:

Definisjon 4.6: Vi sier at <D,E,R> er en streng preordningsstruktur hvis og bare hvis

(i) D er en ikke-tom mengde
(ii) E er en partisjon av D
(iii) R er en relasjon som oppfyller følgende krav:
  (a) R Inkl ExE
  (b) (Ax)(xêE → ¬ R(x,x))
  (c) (Ax)(Ay)(Az)(R(x,y) & R(y,z) → R(x,z)

Et av målene i det følgende er å belyse sammenhengen mellom preordningsstrukturer og det vi nå kalle for strenge preordningsstruktur. For å klargjøre denne sammenhengen trenger vi to begreper. For det første vil vi definere hva som menes med den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av preordningsstrukturen <D,R>. For det andre ønsker vi å

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

definere hva som menes med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av den strenge preordningsstrukturen <D,E,R>. Dette skjer ved de følgende to definisjoner:

Definisjon 4.7: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer E og R+ på følgende måte:
(i) E = Mg(Mg(x: Ekv;R(x,y)): yêD)
(ii) R+ = Mg(<x,y>: x,yêE & (Ez)(Ev)(zêx & vêy & R*(z,v)))
Da kaller vi triplet <D,E,R+> for *den kanoniske strenge preordningsstrukturen* bestemt av <D,R>

Definisjon 4.8: Anta <D,E,R> er en streng preordningsstruktur. Definer relasjonen R' på følgende måte:
(i) R' = Mg(<x,y>: (Ez)(Ev)(z,vêE & xêz & yêv & (z=v v zRv)))
Da kaller vi paret <D,R'> for *den kanoniske preordningsstrukturen* bestemt av den strenge preordningsstrukturen <D,E,R>

Det følgende teorem viser at om <D,R> er en preordningsstruktur så er den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av <D,R> faktisk en streng preordningsstruktur.

Teorem 4.4: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer E og R+ på følgende måte
(i) E = Mg(Mg(x: Ekv;R(x,y)): yêD)
(ii) R+ = Mg(<x,y>: x,yêE & (Ez)(Ev)(zêx & vêy & R*(z,v)))
Da har man at <D,E,R+> er en streng preordningsstruktur.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Vi må først vise at E er en partisjon av D. Anta xêE. Da finnes det i lys av definisjonen av E gitt i satsen noe yêD slik at x=Mg(x:Ekv;R(x,y)). Da har vi åpenbart x Inkl D og derfor (1) E Inkl Pt(D)
Vi må vise at (2) (Az)(zêE → z≠ø). Anta zêE Da har vi z=Mg(x: Ekv;R(x,y)) for noe yêD. Siden Ekv;R(y,y) følger at yêz og dermed at z≠ø. Dette viser at (2) holder. For å vise at E er en partisjon av D er det også nødvendig å vise:
(3) (Ax)(Ay)(x,yêE & x≠y → xΩy=ø)
Anta derfor (4) x,yêE & x≠y for vilkårlige x,y. Fra dette og definisjonen av E følger det at det finnes z1,z2êD slik at (5) x= Mg(v: Ekv;R(v,z1)) & y= Mg(v: Ekv;R(v,z2)). Anta for reduktio at det finnes noe rêxΩy. Da har vi i lys av (5) at (6) Ekv;R(r,z1) &Ekv;R(r,z2). Men siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon i følge Teorem 4.1 følger fra dette og (6) at x=y som strider mot (4). Det følger at xΩy=ø. Dette viser at (3) holder.

Endelig må vi vise at (7) UN(E) = D. Anta xêD. Da har vi siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon over D at Ekv;(x,x). Sett per definisjon at e=Mg(z: Ekv;R(z,x)). Da har vi siden xêD at eêE. Men vi har også at xêe. Det følger at xêUN(E). Dette viser inklusjonen mot venstre i (7). Anta på den annen side for vilkårlig x at xêUN(E). Da finnes det z slik at (8) xêz & zêE. Fra det siste følger at det må finnes yêD slik at z=Mg(v: Ekv;R(v,y)). Fra dette og (8) kan man slutte at Ekv;R(x,y). Men Ekv;R Inkl DxD. Det følger at xêD. Fra (1), (2), (3) og (7) følger at
(9) E er en partisjon av D
Det vil nå være tilstrekkelig å vise det følgende:
(10.1) R+ Inkl ExE
(10.2) (Ax)(xêE → ¬ R+(x,x))

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(10.3) (Ax)(Ay)(Az)(R+(x,y) & R+(y,z) → R+(x,z)

Fra disse tre forhold samt (9) kan man slutte at <D,E,R+> er en streng preordningsstruktur. Man ser umiddelbart fra definisjonen av R+ som er gitt i teoremet at (10.1) holder.

La oss vise (10.2). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x der (11) xêE & R+(x,x). Fra den siste konjunkten og definisjonen av R+ følger eksistensen av z,v slik at (12) zêx & vêx & R*(z,v). Siden xêE følger det på grunnlag av definisjonen av E at det finnes y der (13) yêD & x= Mg(v:Ekv;R(v,y)). Fra dette og (12) følger (14) Ekv;R(z,y) & Ekv;R(v,y). Men fra dette følger (15) Ekv;R(z,v) siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon. Men (12) og (15) motsier hverandre. Det følger at det ikke kan finnes noe x slik at (11). Dette viser at (10.2) holder. Det gjenstår bare å vise at (10.3) holder.

Anta (16) R+(x,y) & R+(y,z). Det følger da at (17) x,y,zêE og at det finnes x1,y1 slik at (18) x1êx & y1êy & R*(x1,y1). Dessuten følger fra den andre konjunkten i (16) at det finnes y2 og z2 slik at (19) y2êy & z2êz & R*(y2,z2). Fra den andre konjunkten i (18) og den første i (19) har vi (20) y1,y2êy. Nå er yêE. Det følger derfor y=Mg(v: Ekv;R(v,u)) for noe uêD. Fra dette og (20) kan man slutte (21) Ekv;R(y1,y2) siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon. Fra (18) og (21) følger ved hjelp av Teorem 4.1 at R*(x1,y2). Fra dette og (19) følger R*(x1,z2). Vi har derfor i lys av (18) og (19) at

x1êx & z2êz & R*(x1,z2). Men fra dette og det forhold at x,zêE følger ved hjelp av definisjonen av R+ at R+(x,z). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem viser at om <D,E,R> er en streng preordningsstruktur så er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,E,R> faktisk en preordningsstruktur.

Teorem 4.5: Anta <D,E,R> er en streng preordningsstruktur. Definer relasjonen R på følgende måte:

(i) R' = Mg(<x,y>: (Ez)(Ev)(z,vêE & xêz & yêv & (z=v v zRv)))

Da har man at <D,R'> er en preordningsstruktur.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Det er nok å vise at R' er en preordning over D. Dette innebærer at vi må bevise følgende:

(1.1) R' Inkl DxD

(1.2) (Ax)(xêD → R'(x,x))

(1.3) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêD & R'(x,y) & R'(y,z) → R'(x,z)

La oss først vise at (1.1) holder. Anta (2) <x,y>êR'. Fra definisjonen som er gitt i teoremet kan man da slutte at det finnes z,v slik at (3) xêz & yêv &z,vêE. Fra forutsetningen følger at E er en partisjon av D. Det impliserer i lys av definisjonen av partisjon at E Inkl Pt(D). Fra dette og det at z,vêE følger z Inkl D&v Inkl D. Herav følger ved hjelp av (3) at x,yêD. Da <x,y>êDxD. Dette viser at (1.1) holder.

La oss så ta for oss (1.2). Anta (4) xêD for vilkårlig x. Siden E er en partisjon av D har man at D er unionen av alle elementene i E. Det må derfor finnes noe z der man har:

(5) xêz & zêE. Men z=z. Fra dette (5) og definisjonen av R' som er gitt i teoremet kan man slutte: R'(x,x)

Det gjenstår å vise at (1.3) holder. Anta for vilkårlige x,y,z at (6) x,y,zêD og at (7) R'(x,y) & R'(y,z). Fra (7) og definisjonen av R' kan man slutte at det må finnes a,b,c og d der man har:

(8.1) a,bêE & xêa & yêb & (a=b v aRb) og

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(8.2) c,dêE & yêc & zêd & c=d v cRd)
Fra (8.1) og (8.2) følger yêb & yêc. Dette impliserer (9) bΩc≠ø. Nå har man b,cêE og at E er en partisjon av D. Det følger da fra (9) at (10) b=c. Fra dette, (8.1) og (8.2) kan man slutte:
(11) (a=b v aRb) & (b=d v bRd) Fra dette følger siden R er en transitiv relasjon at (12) a=d v aRd. Men fra (8.1) og (8.2) følger også åpenbart a,dêE & xêa & zêd. Fra dette, (12) og definisjonen av R' følger så R'(x,z). Dette viser at (1.3) holder.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem viser at preordningsstrukturer og strenge preordningsstrukturer i en viss forstand er ekvivalente.

Teorem 4.6: (a) Anta <D,R> er en preordningsstruktur og at <D,E,R+> er den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av <D,R>. Anta videre at <D,R'> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av den strenge preordningsstrukturen <D,E,R+>. Da har vi:
<D,R> = <D,R'>.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Det følger da fra definisjonen av hva som menes med den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av <D,R> at
(1) E= Mg(Mg(z: Ekv;R(z,y)): yêD)
(2) R+ = Mg(<x,y>: x,yêE & (Ez)(Ev)(xêz & yêv & R*(x,y)))
Siden det forutsettes at <D,R'> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av den strenge preordningsstrukturen <D,E,R+> har vi per definisjon:
(3) R' = Mg(<x,y>: (Ez)(Ev)(z,vêE & xêz & yêv & (z=v v R+(z,v))))
Det vil være tilstrekkelig å vise at (+) R'(x,y) ↔ R(x,y) for alle x,y.
(A) Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre i (+). Anta derfor for vilkårlige x,y at (4) R'(x,y). Fra dette og (3) følger eksistensen av a,b der vi har:
(5) a,bêE & xêa & yêb & (a=b v R+(a,b))
Siden a,bêE har vi ved hjelp av (1) at det finnes v,s slik at
(6.1) a= Mg(z: Ekv;R(z,v)) & vêD
(6.2) b= Mg(z: Ekv;R(z,s)) & sêD
Fra (5), (6.1) og (6.2) følger (7) Ekv;R(x,v) & Ekv;R(y,s). Det er nå i lys av den siste konjunkten i (5) to muligheter:
Tilfelle (i): a=b. Fra dette, (6.1), (6.2) og det faktum at Ekv;R er en ekvivalensrelasjon følger at Ekv;R(v,s). Fra dette og (7) følger Ekv;R(x,y) som i sin tur, i kraft av definisjonen av Ekv;R impliserer R(x,y).
Tilfelle (ii): R+(a,b). Da har vi ved hjelp av (2) at det må finnes x',y' der
(8) x'êa & y'êb & R*(x',y'). Men fra de to første konjunktene her, (6.1), (6.2) følger Ekv;R(x',v) & Ekv;R(y',s). Fra dette og (7) følger (9) Ekv;R(x',x) & Ekv;R(y',y) siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon. Men fra dette, Teorem 4.1 og den siste konjunkten i (8) kan man slutte at R*(x,y). Men fra dette og definisjonen av R* følger R(x,y).Vi har nå vist at kondisjonalen mot høyre i (+) holder.
(B) La oss så vise kondisjonalen mot venstre i (+). Anta (10) R(x,y). Da følger ved hjelp av Teorem 4.2 at Ekv;R(x,y) v R*(x,y). Vi skiller derfor mellom to tilfelle:
Tilfelle (i): (11) Ekv;R(x,y). La oss sette per definisjon:
(12) a= Mg(z: Ekv;R(z,x)) & b= Mg(z: Ekv;R(z,y)) Da har vi at følgende holder: (13) a,bêE & xêa & yêb & a=b siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon. Fra (13) følger

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(14) a,bêE & xêa & yêb & (a=b v R+(a,b)). Men fra dette og definisjonen av R' kan man slutte at R'(x,y).

Tilfelle (ii): Da har man (15) R*(x,y). Vi definerer nå a,b ved:

(16) a= Mg(z:Ekv;R(z,x)) & b=Mg(z:Ekv;R(z,y)). Da følger at

(17) a,bêE & xêa & yêb ved hjelp av definisjonen av E. Men fra (15) og (17) og definisjonen av R+ kan man slutte R+(a,b) og derfor (18) a=b v R+(a,b). Men fra dette, (17) og definisjonen av R' følger: R'(x,y). I begge tilfelle har vi at R'(x,y). Dette viser at også kondisjonalen mot venstre i (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Før vi går videre til neste teorem skal vi vise at den følgende hjelpesetning holder.

Lemma 4.1: Anta <D,E,R> er en streng preordningsstruktur. Definer R' på følgende måte

(i) R' = Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & (q=s v R(q,s))))

Da har man at

(a) Ekv;R' = Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & q=s)) og

(b) R'* = Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & R(q,s)))

Bevis: *Ad (a)*: Vi tar først for oss kondisjonalen mot venstre: Anta derfor

(1) <x,y>êMg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & q=s)) . Da følger at det finnes q,s slik at (2) q,sêE& xêq & yês & q=s. Fra dette og (i) følger åpenbart (3) R'(x,y). Vi må imidlertid også vise R'(y,x). Anta for reduktio at (4) ¬R'(y,x). Fra dette og (i) kan vi slutte ¬(Eq)(Es)(q,sêE& yêq & xês & (q=s v R(q,s))). Herav følger:

(Aq)(As)(q,sêE& yêq & xês → (q≠s & ¬R(q,s)). Fra dette kan man slutte:

(5) s,qêE& yês & xêq → (s≠q & ¬R(s,q) Men dette strider mot (2). Vi har derfor R'(x,y) & R'(y,x). Fra dette følger Ekv;R'(x,y)

Vi gir så bevis for kondisjonalen mot høyre i (a). Anta (6) Ekv;R'(x,y). Da har vi i lys av definisjonen av Ekv;R' at (7) R'(x,y) & R'(y,x). Da følger ved hjelp av (i) at det må finnes q,s og q',s' slik at

(8.1) q,sêE& xêq & yês & (q=s v R(q,s))

(8.2) q',s'êE& yêq' & xês' & (q'=s' v R(q',s'))

Siden E er en partisjon av D følger herav (9) s=q' &q=s'. Fra dette og (8) kan man slutte: (10) (q=s v R(q,s)) & (q=s v R(s,q)). Fra dette har vi (11) q=s v (R(q,s) &R(s,q)) Men siden R er en transitiv og irrefleksiv relasjon følger det at siste disjunkt i (11) er usann. Vi har derfor q=s som sammen med (8.1) impliserer q,sêE& xêq & yês & q=s. Fra dette følger at <x,y> er med i Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & q=s)).

Ad (b): Vi viser først at kondisjonalen mot høyre i (b) holder. Anta derfor (1) R'*(x,y) Herav følger (2) R'(x,y) & ¬R'(y,x). Fra den første konjunkten i (2) og (i) kan man slutte:

(3) (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & (q=s v R(q,s))) Fra den andre konjunkten i (2) og (i) følger:

(4) ¬(Eq)(Es)(q,sêE& yêq & xês & (q=s v R(q,s))) . Herav

(5) (Aq)(As)(q,sêE& yêq & xês → q≠s & ¬R(q,s)).

Fra (3) følger eksistensen av q',s' slik at

(6) q',s'êE& xêq' & yês' & (q'=s' v R(q',s')). Fra dette og (5) følger s'≠q' & ¬R(s',q') Men fra dette og (6) følger q',s'êE& xêq' & yês' & R(q',s'). Fra dette følger så at

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

<x,y>êMg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & R(q,s)))

Vi beviser så kondisjonalen mot venstre i (b):

Anta (7) <x,y>êMg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & R(q,s)))

Da finnes q',s' slik at (8) q',s'êE& xêq' & yês' & R(q',s'). Herav følger ved hjelp av (i) at

(9) R'(x,y). Vi må vise ¬R'(y,x). Anta for reduktio at R'(y,x). Ved hjelp av (i) har vi da at det finnes q",s" slik at (10) q",s"êE& yêq" & xês" & (q"=s" v R(q",s")). Fra dette og (8) følger siden E er en partisjon av D at s"=q' og q"=s'. Fra dette og (10) har vi q'=s' v R(s',q'). Er q'=s' følger ved hjelp av (8) at R(s',s') som er umulig. Har vi R(s',q') følger ved hjelp av (8) igjen at R(q',q') som er umulig. Det følger at ¬R'(y,x), som sammen med det at R'(x,y) impliserer R'*(x,y).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 4.7: Anta <D,E,R> er en streng preordningsstruktur og at <D,R'> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,E,R>. Anta videre at <D,E',R+> er den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av preordningstrukturen <D,R'>. Da har vi:

<D,E,R> = <D,E',R+>.

Bevis: Fra den første forutsetningen i satsen følger det at man har:

(1) R' = Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & (q=s v R(q,s))))

Fra den andre forutsetningen følger det at

(2) E' = Mg(Mg(z: Ekv;R'(z,y)):yêD)

(3) R+ = Mg(<x,y>: x,yêE' & (Ez)(Ev)(zêx & vêy & (R')*(z,v))

Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at

(4) E' = E og

(5) R+ =R

Vi viser først at (4) holder. Vi ser først på inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig a at (6) aêE'. Da følger det at (7) a=Mg(z: Ekv;R'(z,y)) for noe y der (8) yêD. Siden yêD og E er en partisjon av D følger det at det finnes b der (9) bêE slik at (10) yêb. Videre følger det fra (1) og Lemma 4.1 at

(11) Ekv;R' = Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & q=s))

Det vil være tilstrekkelig å vise at a=b. Anta for vilkårlig z at zêa. Da følger fra (7) at Ekv;R'(z,y). Fra dette og (11) følger så eksistensen av q,s der

(12) q,sêE &zêq &yês & q=s. Men bêE &yêb. Siden E er en partisjon av D har man derfor fra dette og (12) at s=b. Fra dette og (12) følger videre zêq =s=b. Dette viser at a inkludert i b. Anta nå på den annen side at at zêb for vilkårlig z. Da har vi i lys av (9) og (10) at z,yêb & bêE. Fra dette kan man slutte at (Eq)(Es)(q,sêE& zêq & yês & q=s). I sin tur impliserer dette Ekv;R'(z,y). Men da har man i lys av (7) at zêa. Dette viser at a=b. Dermed har vi også vist inklusjonen mot høyre i (4)

La oss så vise inklusjonen mot venstre i (4). Anta for vilkårlig a at (13) aêE. Siden E er en partisjon av D følger fra (13) at a er ikke-tom. Det finnes derfor noe y slik at (14) yêa & yêD. Anta nå at for vilkårlig zêa. Da følger fra (13) og (14) at vi har

(15) y,zêa &aêE. Fra dette og (11) følger Ekv;R'(z,y). Sett per definisjon (16) b= Mg(v: Ekv;R'(v,y)) Det følger da at zêb. Anta på den annen side at zêb for vilkårlig z. Da har vi Ekv;R'(z,y) og det må følgelig i lys av (11) finnes q,s der

(17) q,sêE &zêq &yês & q=s. Men yêaêE og E er en partisjon av D. Da har vi s=a og følgelig zêq=s=a. Det følger at a=b. Men fra (16) og det at yêD har vi bêE'. Det følger

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

at aêE'. Siden a var vilkårlig følger E Inkl E'.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (4).

Det gjenstår å gi bevis for (5). Fra forutsetningene i satsen og (1) følger ved hjelp av Lemma 4.1 at

(18) R'* = Mg(<x,y>: (Eq)(Es)(q,sêE& xêq & yês & R(q,s)))

Vi viser først inklusjonen mot høyre i (5). Anta (19) R+(x,y). Fra dette følger ved hjelp av (3) og (4) at x,yêE & (Ez)(Ev)(zêx & vêy & (R')*(z,v)). Herav følger eksistensen av z,v slik at (20) x,yêE & zêx & vêy & (R')*(z,v). Fra den siste konjunkten i (20) og (18) kan man slutte at det finnes q,s der (21) q,sêE & zêq & vês & R(q,s)). Siden E er en partisjon av D følger fra de tre første konjunktene i (20) og de tre første i (21) at x=q &y=s. Fra dette og den siste konjunkten i (21) har man R(x,y). Dette viser at R+ Inkl R.

La oss vise inklusjonen den andre veien i (5). Anta (22) R(x,y). Siden <D,E,R> er en streng preorningsstruktur følger det at (23) x,yêE. Siden E er en partisjon av D må x,y være ikke-tomme. Det finnes med andre ord z,v slik at (24) zêx & vêy. Fra (22)-(24) og (18) kan man slutte at R'*(z,v). Men fra dette og (24) kan man slutte:

(Ez)(Ev)(zêx & vêy & (R')*(z,v))

I lys av (23) kan man fra dette og (3)og (4) slutte at R+(x,y). Vi har nå vist R+=R og dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

La oss betegne mengden av alle preordningsstrukturer over domenet D, ie mengden av alle de preordningsstrukturer <D',R> der D'=D med S(D). La oss på samme måte betegne mengden av alle strenge preordningsstrukturer over D med S'(D). S'(D) er altså mengden av alle strenge preordningsstrukturer <D',E,R> der D'=D. Er x et element i S(D) er x selvfølgelig en preordningsstruktur. Vi betegner da den kanoniske strenge preordningsstrukturen bestemt av x med f(x). På grunnlag av den definisjonen vi har gitt av den strenge kanoniske preordningsstruktur bestemt av en preordningsstruktur fremgår det at f er en funksjon, at domenet til denne funksjonen er S(D) og at f i det minste avbilder S(D) inn i S'(D). Kort sagt har vi:

(1) $f: S(D) \rightarrow S'(D)$

Likeledes har vi om y er et element i S'(D) at y er en streng preordningsstruktur. Vi betegner da den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av y med g(y). Det fremgår av den definisjonen vi har gitt av hva som menes med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av den strenge preordningsstrukturen y at g er en funksjon. Enn mer fremgår det fra det vi har bevist ovenfor at domenet til g er hele S'(D) og at g avbilder S'(D) i det minste inn i S(D). Vi har derfor:

(2) $g: S'(D) \rightarrow S(D)$

Gitt de definisjonene vi nå har gitt kan man ved hjelp av Teorem 4.6 slutte at

(3) $(Ax)(x \hat{e} S(D) \rightarrow g(f(x)) = x)$

Likeledes har man ved hjelp av Teorem 4.7 at

(4) $(Ax)(x \hat{e} S'(D) \rightarrow f(g(x)) = x)$

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes x1,x2ê S(D) der x1≠x2 og hvor man har f(x1)=f(x2). Fra dette og (3) følger g(f(x1)) =x1 og g(f(x2)) =x2. Men siden f(x1)=f(x2) følger det fra disse to forhold at x1=x2 som åpenbart strider mot at x1≠x2. Det følger derfor at f ikke bare avbilder S(D) inn i S'(D), men at den avbilder S(D) en-entydig inn i S'(D).

Dette er imidlertid ikke alt. Anta y er et element i S'(D). Da følger ved hjelp av (2) at g(y)êS(D). Men ved hjelp av (4) har vi f(g(y))=y og derfor (Ez)(f(z)=y). Dette viser at f ikke bare avbilder S(D) inn i S'(D), men *på* S'(D). Vi kan derfor konkludere med at f er en korrelasjon mellom S(D) og S'(D):

(5) f: S(D) -(1-1,på)→S'(D)

På en helt tilsvarende måte kan man vise at g avbilder S'(D) en-entydig og på S(D). Det følger at g er en korrelasjon mellom S'(D) og S(D):

(6) g: S'(D) -(1-1,på) → S(D)

Det følger også fra (5) og (6) at f;-1 =g og at g;-1=f, med andre ord er g omvendingen av f og f omvendingen av g.

§5 Sammenhengen mellom preordningsstrukturer og akseptansestrukturer

Målet i dette avsnittet er å vise at det finnes en naturlig en-entydig avbildning av mengden av alle preordningsstrukturer over mengden D på mengden av alle akseptansestrukturer over D.

La oss starte med å definere hva som menes med en akseptansestruktur, siden vi så langt bare har definert hva som menes med en akseptanserelasjon over mengden D og hva som menes med en sterk akseptanserelasjon over D:

Definisjon 5.1: Anta B er en sterk akseptanserelasjon over D. Da kaller vi det ordnete paret <D,B> for en akseptansestruktur. Den første komponenten i en akseptansestruktur kaller vi for domenet i strukturen.

La oss så definere hva som forstås med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av akseptansestrukturen <D,B>:

Definisjon 5.2: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Definer relasjonen R ved:
(i) R = Mg(<x,y>: e;B(x,y) v r;B(x,y))
Da kaller vi <D,R> for *den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av akseptansestrukturen <D,B>*.

Man ser fra definisjonen ovenfor at dersom det finnes en kanonisk predordningsstruktur bestemt av akseptansestrukturen <D,B> så er denne preordningsstrukturen entydig bestemt.

Det følgende teorem viser at den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av akseptansestrukturen <D,B> faktisk er en preordningsstruktur.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Teorem 5.1: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Definer relasjonen R ved
(i) R = Mg(<x,y>: e;B(x,y) v r;B(x,y))
Da har man at <D,R> er en preordningsstruktur

Bevis: Anta forutsetningene holder. Det følger ved hjelp av definisjonene av e;B og r;B at e;B Inkl DxD og at r;B Inkl DxD. Fra dette og definisjonen (i) i teoremet følger at R Inkl DxD. Anta xêD for vilkårlig x. Da følger ved hjelp av Teorem 3.5 at e;B(x,x) og derfor i lys av definisjonen av R at R(x,x).

Det gjenstår å vise at R er transitiv. Anta derfor (1) at R(x,y) & R(y,z). Det følger da ved hjelp av definisjonen av R at følgende holder:

(2.1) e;B(x,y) v r;B(x,y)
(2.2) e;B(y,z) v r;B(y,z)

Det vil være tilstrekkelig å vise (+) e;B(x,z) v r;B(x,z). I lys av (2.1) og (2.2) skiller vi mellom fire tilfelle:

Tilfelle (i): e;B(x,y) & e;B(y,z) siden e;B er transitiv i følge Teorem 3.5 følger det at e;B(x,z). Herav følger selvfølgelig e;B(x,z)v r;B(x,z).

Tilfelle (ii): e;B(x,y) & r;B(y,z). Da følger r;B(x,z) ved hjelp av Teorem 3.5 (iv). Fra r;B(x,z) følger naturligvis e;B(x,z)v r;B(x,z) og derfor R(x,z).

Tilfelle (iii): Man har r;B(x,y) & e;B(y,z). Da følger r;B(x,z) ved hjelp av Teorem 3.5 (v). Det følger at e;B(x,z)v r;B(x,z) og derfor R(x,y).

Tilfelle (iv): Man har r;B(x,y) & r;B(y,z). Da følger ved hjelp av Teorem 3.5 (vii) at r;B(x,z). Da har man e;B(x,z)v r;B(x,z) og følgelig R(x,y).

Vi har nå vist at R er en preordning over D og derfor at <D,R> er en preordningsstruktur. **QED**.

Ovenfor har vi definert hva som menes med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av akseptansestrukturen <D;B>. Den følgende definisjon fastsetter innholdet i "det omvendte begrep". Vi definerer nedenfor hva som menes med den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av preordningsstrukturen <D,R>:

Definisjon 5.3: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(i) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)[1]
Da kaller vi paret <D,B> for *den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av preordningsstrukturen <D,R>*.

Det følgende teorem, som er et av våre hovedteoremer i dette notatet, sier at den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av preordningsstrukturen <D,R> faktisk er en akseptansestruktur.

Teorem 5.2: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(i) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)
Da er <D,B> en akseptansestruktur.

1 Den grunnleggende ideen bak denne definisjon har vi fra Bengt Hansson. Hansson bruker denne ideen for å gi en semantisk analyse av visse dyadiske deontiske logikker foreslått av Rescher og von Wright, se Hansson [2]. I forbindelse med dette arbeidet kan det også være av interesse konsultere Hansson [1].

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Siden beviset for denne satsen blir temmelig langt om vi forsøker å vise det direkte skal vi vise en rekke satser som samlet impliserer dette teoremet.

Teorem 5.3: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(i) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)
Da gjelder:
(Ay)(yêPt(D) → κ(y) = Max(R,y))

Bevis: Anta yêPt(D). Vi må bevise (+) κ(y)) = Max(R, y). (a) Vi beviser først inklusjonen mot høyre i (+). Anta derfor for vilkårlig w at (1) wêκ(y). I lys av definisjonen av κ innebærer dette at (2) wêI & (Ez)B(z,y)& (Ax)(B(x,y) → wêx). Fra den andre konjunkten i (2) og definisjonen av B følger (3) Max(R,y)≠ø. Fra den siste konjunkten i (2) og definisjonen av B følger:
(4) (Ax)(xêPt(D) & yêPt(D) & ø≠Max(R,y) Inkl x → wêx)
Sett nå x0= Max(R,y)). Da har vi åpenbart at x0êPt(D). Vi har også yêPt(D). Videre har vi ved hjelp av (3) at ø≠Max(R, y) Inkl x0. Fra disse forhold og (4) følger wêx0. Men fra dette og definisjonen av x0 følger wêMax(R,y). Dette viser inklusjonen mot høyre.
(b) Vi tar nå for oss inklusjonen mot venstre i (+). Anta (1) wêMax(R,y) for vilkårlig w. Det vil være tilstrekkelig i lys av definisjonene av κ og B å vise følgende to påstander:
(2.1) Max(R,y) ≠ø
(2.2) (Ax)(xêPt(D) & ø≠Max(R,y) Inkl x. →wêx)
Nå følger (2.1) umiddelbart fra (1). Vi må vise at (2.2) holder. Anta derfor for vilkårlig x at (3) xêPt(D) & ø≠Max(R,y) Inkl x. Da følger Max(R,y) Inkl x. Men fra dette og (1) følger wêx. Siden x var vilkårlig holder (2.2).
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 5.4: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)
Da gjelder for alle x,y,z êPt(D) at
(i) B Inkl Pt(D)xPt(D)
(ii) B(x,y) & x Inkl z &zêPt(D)→ B(z,y)
(iii) B(x,y) → B(y,y)
(iv) B(x,y) → ¬B(D-x,y)
(v) ø≠Δ Inkl Pt(D) & (Ax)(xêΔ → B(x,y)) → B(SN(Δ),y)

Bevis: *Ad (a)*: Dette følger direkte fra definisjonen av B.
Ad (b): Anta (1) B(x,y) og (2) x Inkl z & zêPt(D). Vi vil ønsker å vise at B(z,y). Fra (1) og definisjonen av B følger: (3) ø≠Max(R,y) Inkl x. Fra dette og (2) følger (4) ø≠ Max(R,y) Inkl z. Siden B(x,y) impliserer yêPt(D) har vi fra siste konjunkt i (2), (4) og definisjonen av B at B(z,y). Dette viser at punkt (b) holder.
Ad (c): Anta (1) B(x,y). Ved hjelp av definisjonen av B følger da:
(2) x,yêU & ø≠ Max(R,y) Inkl x. Fra dette følger (3) ø≠ Max(R,y).
Nå følger det fra definisjonen av Max at (4) Max(R, y) Inkl y. Fra dette, (3), den første konjunkten i (2) og definisjonen av B følger B(y,y).
Ad (d): Anta for reduktio ad absurdum at (1) B(x,y) & B(Neg(x),y). Ved hjelp av definisjonen av B følger da:

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(2.1) ø≠Max(R,y) Inkl x
(2.2) ø≠Max(R,y) Inkl (D- x)
Fra den første konjunkten i (2.1) følger det at det finnes noe x0êMax(R,y). Men fra dette, (2.1) og (2.2) følger x0êx & x0ê(D-x). Siden x0êD har vi da x0êx & ¬(x0êx. Dette er åpenbart en motsigelse. Det følger at (1) ikke holder og at vi følgelig har B(x,y) → ¬ B(Neg(x),y).

Ad (e): Anta (1) ø≠Δ Inkl Pt(D) og (2) (Ax)(xêΔ → B(x,y)) Fra (2) følger ved hjelp av definisjonen av B: (3) (Ax)(xêΔ → ø≠Max(R,y) Inkl x) Fra dette følger i sin tur (4) (Ax)(xêΔ → Max(R,y) Inkl x). Siden Δ≠ø kan man ved hjelp av (3) slutte at (5) ø≠ Max(R,y). Fra (4) følger (6) Max(R,y) Inkl SN/xêΔ/(x). For anta (7) wêMax(R,y) for vilkårlig w. Anta (8) xêΔ for vilkårlig x. Da har vi fra (4), (7) og (8) at wêx. Siden x var vilkårlig følger (Ax)(xêΔ → wêx). Fra dette og definisjonen av snitt følger wêSN/xêΔ/(x)). Men w var vilkårlig derfor

(Aw)(wêMax(R;e, y) → wêSN/xêΔ/(x))). Dette viser at (6) holder. Nå har man at SN/xêΔ/(x)= SN(Δ). Fra dette, (5) og (6) følger:

ø≠ Max(R,y) Inkl SN(Δ).

Siden SNu(Δ)êPt(D) siden ø≠Δ Inkl Pt(D) og det følger fra (1) og (2) at yêPt(D) kan man slutte ved hjelp av definisjonen av B at B(SN(Δ),y). Dette viser at punkt (e) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 5.5: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)
Da gjelder:
(Ay)(yêPt(D) → . (Ez)B(z,y) ↔ ø≠ Max(R,y))

Bevis: Anta (0) yêPt(D). Vi ser først på kondisjonalen mot høyre: Anta (1) (Ez)B(z,y). Ved hjelp av definisjonen av B kan man da slutte at det finnes z der man har:

ø≠Max(R,y) Inkl z. Fra dette følger åpenbart ø≠Max(R,y).

La oss dernest vise at kondisjonalen mot venstre holder: Anta (2) ø≠Max(R,y). Fra definisjonen av Max følger: Max(R, y) Inkl y. Dette, (0), (2) og den definisjonen vi har gitt av B impliserer B(y,y). Men fra dette følger åpenbart (Ez)B(z,y).

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 5.6: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)
Da har man for alle yêPt(D) at
η(y) ↔ (Ez)(zêD & y =[z];R)

Bevis: Anta yêPt(D). (a) Vi viser først at kondisjonalen mot venstre holder: Anta derfor (1) (Ew)(wêD & y=[w];R). Da finnes x0 slik at (2) x0êD & y=[x0];R. Det er lett å vise at Max(R,[x0];R) = [x0];R. Fra dette og (2) følger (2.1) Max(R,y)=[x0];R. Siden x0ê[x0];R følger da (3) x0êMax(R,y)) og derfor ved hjelp av Teorem 5.3 at

(4) κ(y)≠ø.

Anta nå for vilkårlig z at (5) zêPt(D) og (6) κ(z)Ωκ(y)≠ø. Fra dette og Teorem 5.3 følger (7) Max(R,z)ΩMax(R,y) ≠ø. I lys av (2.1) ovenfor impliserer dette:

(8) Max(R,z)Ω[x0];R ≠ ø

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Ved hjelp av Teorem 4.3 (iv) i forrige avsnitt kan man fra dette slutte at

Max(R, z) Inkl [x0];R =Max(R,y).

Fra dette og Teorem 5.3 følger κ(z) Inkl κ(y). Siden z var et vilkårlig element som oppfylte kravene (5) og (6) har vi vist:

(9) (Az)(zêPt(D) & κ(z)Ωκ(y) ≠ø → κ(z) Inklκ(y))

Nå har vi åpenbart at

[x0];R Ω Max(R,y)) = [x0];R

Ved hjelp av (2) ovenfor og Teorem 5.3 kan man fra dette slutte (10) yΩκ(y)=y.

Fra (4), (9), (10) og definisjonen av η følger η(y). Dette viser at kondisjonalen mot venstre i teoremet holder.

(b) Vi viser så kondisjonalen mot høyre: Anta (1) η(y). I kraft av definisjonen av η har vi da

(1.1) yêPt(D) & κ(y) ≠ø

(1.2) (Az)(zêPt(D) & κ(z)Ωκ(y)≠ø → κ(z) Inkl κ(y))

(1.3) yΩκ(y) = y.

Fra den andre konjunkten i (1.1) følger at det finnes w1 der:

(2) w1êκ(y) & w1êD

Sett per definisjon (3) r0=[w1];R. Da har vi (4) (Ew)(wêD & r0 =[w];R). Fra dette og det vi viste under (a) følger at (5) η(r0). Fra (2) følger ved hjelp av Teorem 5.3:

(6) w1êMax(R,y)). Vi har derfor, siden det følger fra (3) at w1êr0 at

(7) yΩr0 ≠ø. Men fra dette, (1), (5) og Teorem 3.3, hvor vi ikke forutsetter mer enn at B er en akseptanserelasjon dvs. ikke forutsetter at B har noen andre egenskaper enn dem som er nevnt i Teorem 5.4, følger at r0=y. Men fra dette og (4) følger da det vi ønsker, nemlig (Ew)(wêD & y=[w];R).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 5.7: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:

(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

Da har man:

(Ax)(xêD → (Ey)(η(y) & xêy))

Bevis: Anta (1) wêD. Sett per definisjon: (2) y = [w];R Da har man yêPt(D). Da har vi (3) (Ew)(wêD & y = [w];R). Fra dette og Teorem 5.6 kan vi konkludere med at η(y). Fra (2) følger wêy. Det følger at (Ey)(η(y) & wêμ(y)). **QED**.

Teorem 5.8: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:

(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

Anta følgende:

(i) x,y,zêPt(D)

(ii) η(x) & η(y) & η(z) & x≠y & y≠z

(iii) κ(xUy) = x & κ(yUz)=y

Da har man at følgende holder:

κ(xUz) = x

Bevis: Fra forutsetning (ii) i satsen og Teorem 5.6 kan man slutte at det finnes w0, w1, w2 der:

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(1.1) w0êD & x=[w0];R
(1.2) w1êD & y=[w1];R
(1.3) w2êD & z=[w2];R

Siden x≠y og y≠z følger i tillegg at

(1.4) xΩy=ø og (1.5) yΩz=ø.

Fra forutsetningen (iii) følger ved hjelp av Teorem 5.3 at

(2.1) Max(R, xUy) = x
(2.2) Max(R, yUz) =y

Det vil, i lys av Teorem 5.3 være tilstrekkelig å bevise at:

(+) Max(R, xUz) = x

Vi kan ikke ha at x=z for i lys av (2.1) og (2.2) ville vi da ha x=y som strider mot (1.4) samt (1.1) og (1.2). Det følger at x≠z og derfor i lys av (1.1) - (1.3) at (3) xΩz≠ø.

Fra (2.1) kan man slutte ved hjelp av (1.1) at w0êMax(R,xUy) og derfor ved hjelp av definisjonen av Max at (5) (Aw)(wê(xUy) → R(w0,w). Siden w1êy ifølge (1.2) følger (6) R(w0,w1). Anta nå at R(w1,w0). Da ville vi ha Ekv;R(w0,w1) i lys av (6) og dermed w1êx. Dette strider mot (1.4). Vi konkluderer derfor med at

(7) R*(w0, w1)

I lys av (1.2) og (2.2) har man w1êMax(R,yUz). Det følger at

(8) (Aw)(wê(yUz) → R(w1,w))

Siden w2êz ifølge (1.3) har vi ved hjelp av (8) at R(w1,w2). Hadde vi imidlertid da hatt at R(w2,w1) ville vi ha Ekv;R(w1,w2) . Man da w2ê(yΩz) som strider mot (1.5).

Det følger at

(9) R*(w1,w2)

La oss nå bevise (+). Vi ser først på inklusjonen mot høyre: Anta for reduktio det finnes w der (10) wêMax(R, xUz) & ¬(wêx)

Siden Max(R,xUz) Inkl xUy følger at wê(xUz) og derfor i lys av den andre konjunkten i (10) at (11) wêz. Fra dette og (1.2) følger (12) Ekv;R(w2,w). Fra (10) og definisjonen av Max følger: (13) (Aw')(w'ê(xUz) →(R(w,w')). Siden w0êx har vi derfor R(w,w0). Men dette og (12) gir oss R(w2,w0) som strider mot R*(w0,w2) som følger fra (7) og (9). Det følger at (10) leder til en motsigelse og at inklusjonen mot høyre i (+) holder.

La oss nå se på inklusjonen mot venstre i (+). Anta for reduktio at det finnes w der (14) wêx & ¬(wêMax(R, xUz). Fra den siste konjunkten i (14) og definisjonen av Max følger eksistensen av w' der man har:

(15) w'êxUz & ¬R(w,w')

Det er nå i lys av (15) to muligheter. Er w'êx har vi, siden x=[w0];R at Ekv;R(w,w0) & Ekv;R(w0,w'). Den første konjunkten følger ved hjelp av (14). Det følger at Ekv;R(w,w') og derfor R(w,w') som strider mot (15). Har man på den annen side w'êz har man siden z=[w2];R at Ekv;R(w',w2). Videre følger fra den første konjunkten i (14) og (1.1) at Ekv;R(w,w0). Fra disse forhold og (15) følger (16) ¬(R(w0,w2)). Men fra (7) og (9) følger R*(w0,w2) og derfor R(w0,w2). Men dette strider åpenbart mot (16). Dette viser at inklusjonen mot venstre i (+) holder.

Vi har dermed vist (+) og følgelig gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 5.9: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:

(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

Da har man at følgende holder for alle x, y og z:

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

yêPt(D) & zê(y-κ(y)) & xêκ(y) →
(Es)(Eq)(η(s)&η(q) & xês &zêq & sΩq=ø & κ(sUq)=s)

Bevis: Anta (1) yêPt(D) & zê(y-κ(y)) & xêκ(y). Ved hjelp av Teorem 5.3 følger at (2) κ(y) = Max(R,y). Videre følger fra (1) at (3) x,zêD. Fra (1) og (2) følger også:

(4) xêMax(R,y) & zê(y - Max(R,y)). Fra dette og Teorem 4.3 (iii) følger så: (5) R*(x,z). La oss sette per definisjon: (6) a= [x];R & b=[z];R. Fra dette og (3) kan man så ved hjelp av Teorem 5.6 slutte at (7) η(a) & η(b). Hadde vi aΩb≠ø følger fra (6) at Ekv;R(x,z) som strider mot (5). Derfor: (8) aΩb=ø. Fra (6),(7) og (8) kan man slutte:

(9) η(a)&η(b) & xêa & xêb & aΩb=ø.

I lys av (9) og Teorem 5.3 vil det være tilstrekkelig å vise:

(+) Max(R, aUb) =a

Dette er ekvivalent med (++) Mg(r: rê(aUb) & (Av)(vê(aUb) →R(r,v))) =a
For å fullføre beviset vil det følgelig være tilstrekkelig å bevise (++).

Vi viser først kondisjonalen mot høyre i (++). Anta derfor for vilkårlig r at (10) rê(aUb) & (Av)(vê(aUb) → R(r,v)). Anta for reduktio ad absurdum at (11) ¬(rêa). Fra dette og den første konjunkten i (10) følger rêb.Fra dette og (6) følger (12) Ekv;R(r,z). Nå har man fra den første konjunkten i (6) at xêa. Fra dette og den andre konjunkten i (10) følger (13) R(r,x). Fra (12) og (13) følger R(z,x). Dette strider åpenbart mot (5). Det følger at inklusjonen mot høyre i (++) holder.

La oss så bevise inklusjonen mot venstre i (++). Anta for vilkårlig r at (14) rêa. Da har man åpenbart at (15) rê(aUb). Anta for vilkårlig v at (16) vê(aUb). Da har man enten at vêa eller vêb. *Tilfelle (i)*: vêa. Da har vi i lys av (6) at Ekv;R(v,x). Fra (14) følger Ekv;R(r,x). Det følger at Ekv;R(r,v) og derfor i lys av definisjonen av Ekv;R at R(r,v). *Tilfelle (ii)*: vêb. Da har man ved hjelp av den andre konjunkten i (6) at Ekv;R(v,z). Fra (14) og (6) følger Ekv;R(r,x). Fra disse to forholdene og (5) følger så R(r,v).

I begge tilfelle har man R(r,v). Siden v var vilkårlig har vi vist at (Av)(vê(aUb) →R(r,v)). Fra dette og (15) følger

rê(aUb)& (Av)(vê(aUb) →R(r,v)). Dette viser at også inklusjonen mot venstre i (++) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 5.10: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:

(a) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

Da har man:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêD →. e;B(x,y) ↔ Ekv;R(x,y))

(ii) (Ax)(Ay)(x,yêD →. r;B(x,y) ↔ R*(x,y))

Bevis: *Ad (i)*: Vi viser først at kondisjonalen mot høyre holder. Anta (1) e;B(w,w'). Ved hjelp av definisjonen av e;B følger da eksistensen av y der man har (2) η(y) & w,w'êy. Fra dette og Teorem 5.6 kan man slutte at det må finnes w0 der (3) w0êI & y=[w0];R. Fra dette og (2) følger w,w'ê[w0];R. Men dette impliserer i lys av definisjonen av "[w];R" at Ekv;R(w,w0) & Ekv;R(w',w0). Siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon følger herav Ekv;R(w,w').

La oss nå ta for oss kondisjonalen mot venstre: Anta (1) Ekv;R(w,w'). Da har vi (2) w,w'ê[w];R. Sett per definisjon (3) y0= [w];R. Siden wêD følger da ved hjelp av

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Teorem 5.6 at (4) η(y0). Fra (2) og (3) følger videre at

w,w'êy0=[w];R. Vi har derfor (5) η(y0) & w,w'êy0. Fra dette og definisjonen av e;B følger e;B(w,w'). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (ii): Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre:

Anta derfor (1) r;B(w,w'). Fra dette og definisjonen av r;B følger eksistensen av y,z der

(1.1) η(y) & η(z) & wêy& w'êz

(1.2) yΩz =ø

(1.3) κ(yUz)=y

Ved hjelp av Teorem 5.6 kan man fra (1.1) slutte at det finnes w0,w1 der man har:

(2.1) w0êI & y = [w0];R

(2.2) w1êI & z=[w1];R

Fra (1.3) og Teorem 5.3 kan man slutte: (3) Max(R,yUz) =y. Siden wêy ifølge (1.1) følger fra dette, (3) og definisjonen av Max at (4) (Ar)(rê(yUz) → R(w,r)). Siden w'êz ifølge (1.1) følger ved hjelp av (4) at (5) R(w,w'). Anta nå for reduktio at (6) R(w',w). Sammen med (5) impliserer dette (7) Ekv;R(w,w'). Fra (1.1), (2.1) og (2.2)

(8.1) Ekv;R(w,w0)

(8.2) Ekv;R(w',w1).

Fra dette og (7) følger derfor [w0];R =[w1];R og derfor y = z. Siden y≠ø og z≠ø strider dette mot (1.2). Det følger at ¬(R(w',w)). Vi har derfor i lys av (5) og definisjonen av R* at R*(w,w').

La oss så vise kondisjonalen mot venstre i punkt (ii). Anta (1) R*(w,w'). Definer utsagnene y og z ved (2) y =[w];R og (3) z= ([w'];R). Fra dette og Teorem 5.3 kan man slutte (4.1) η(y) & η(z) & wêy & w'êz. Siden R*(w,w') følger ¬(Ekv;R(w,w')) og derfor [w];RΩ[w'];R = ø. Vi har derfor (4.2) yΩz=ø

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise:

(5) Max(R,yUz)= y

For fra dette og Teorem 5.3 følger κ(yUz)=y som sammen med (4.1) og (4.2) impliserer r;B(w,w').

La oss først vise *inklusjonen mot høyre* i (5). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w" der

(6.1) w" êMax(R, yUz) og

(6.2) ¬(w"êy)

Fra (6.1) og definisjonen av Max følger (7) (Ar)(rê(yUz) → R(w",r)). Fra (6.1) følger også w"ê (yUz) som sammen med (6.2) gir en: w"êz. Dette og (2) impliserer w"ê[w'];R og derfor (8) Ekv;R(w",w'). Siden wêy følger i lys av (7) at Re;(w",w). Men dette og (8) impliserer R(w',w) som strider mot (1). Dette viser inklusjonen mot høyre.

La oss så vise *inklusjonen mot venstre*: Anta (9) w"êy for vilkårlig w". Da har vi w"ê[w];R og derfor: (10) Ekv;R(w",w). Anta nå for vilkårlig r at (11) rê(yUz). Det vil da være tilstrekkelig å vise at (+) R(w",r). For i så fall vil vi ha (Ar)(rê(yUz) →R(w",r)). Dette og (9) impliserer w"êMax(R,yUz). Siden vi antar for vilkårlig r at (11) holder er det to muligheter: *Tilfelle (i)*: rêy. Da har vi rê[w];R og derfor Ekv;R(r,w). Fra dette følger R(w,r) som sammen med (10) gir oss det vi ønsker: R(w",r). *Tilfelle (ii)*: rêz. Da har man rê[w'];R og derfor (11) Ekv;R(w',r). Fra (1) og (10) følger R*(w",w'). Fra dette og (11) følger så R(w",r). I begge tilfelle har vi altså at R(w",r). Dette viser at (+) holder.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 5.10. **QED**.

Teorem 5.11 Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(a) $B= Mg(<x,y>: x,y\hat{e}Pt(D) \& \emptyset \neq Max(R,y) \& Max(R,y)\ Inkl\ x)$
Da har man:
$(Ay)(y\hat{e}Pt(D) \rightarrow .\ Max(r^*;B, y) \neq \emptyset \rightarrow \kappa(y) \neq \emptyset)$

Bevis: Fra Teorem 5.10 kan man utlede at $r^*;B = R$. Det følger derfor ved hjelp av Definisjon 3.5 og Definisjon 4.3 at dersom $y\hat{e}Pt(D)$ har man $Max(r^*;B,y)= Max(R,y)$. Det følger derfor om $y\hat{e}Pt(D) \& Max(r^*;B,y)\neq\emptyset$ at man har $Max(R,y)\neq\emptyset$. Men fra dette og Teorem 5.3 følger i sin tur at $\kappa(y)\neq\emptyset$. Dette viser at satsen holder. **QED**.

La oss nå vende oss mot beviset for Teorem 5.2 som vi så langt ikke har bevist. Som man husker er teoremet den følgende sats, som vi oppfører på nytt av referansehensyn.

Teorem 5.2: Anta <D,R> er en preordningsstruktur. Definer relasjonen B ved:
(i) $B= Mg(<x,y>: x,y\hat{e}Pt(D) \& \emptyset \neq Max(R,y) \& Max(R,y)\ Inkl\ x)$
Da er <D,B> en akseptansestruktur.

Bevis: Anta forutsetningene holder. Vi må vise at <D,B> er en akseptansestruktur. I henhold til Definisjon 5.1 innebærer dette at B er en sterk akseptanserelasjon over D. Dette i sin tur innebærer i lys av Definisjon 3.6 og Definisjon 3.1 at B må oppfylle de følgende krav:

(a) $B\ Inkl\ Pt(D)XPt(D)$
(b) $B(x,y) \rightarrow \neg B(D\text{-}x,y)$
(c) $B(x,y) \rightarrow B(y,y)$
(d) $B(x,y) \& x\ Inkl\ z \& z\hat{e}Pt(D) \rightarrow B(z,x)$
(e) $\emptyset \neq \Delta\ Inkl\ Pt(D) \& (Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow B(x,y)) \rightarrow B(SN(\Delta),y)$
(f) $(Az)(z\hat{e}D \rightarrow (Ey)(y\hat{e}Pt(D) \& z\hat{e}\eta(y))$
(g) $x,y,z\hat{e}Pt(D) \& \eta(x) \& \eta(y) \& \eta(z) \& x\neq y \& y\neq z \& \kappa(xUy) = x \& \kappa(yUz) = y \rightarrow \kappa(xUz) = x$
(h) $y\hat{e}Pt(D) \& z\hat{e}(y\text{-}\kappa(y)) \& x\hat{e}\kappa(y) \rightarrow (Es)(Eq)(\eta(s)\&\eta(q) \& x\hat{e}s \&z\hat{e}q \& s\Omega q=\emptyset \& \kappa(sUq)=s)$
(i) $y\hat{e}Pt(D) \rightarrow .\ Max(r^*;B,y)\neq\emptyset \rightarrow \kappa(y)\neq\emptyset$

Det vil altså være tilstrekkelig å vise at B oppfyller disse kravene. At B oppfyller kravene (a) - (e) følger imidlertid umiddelbart ved hjelp av Teorem 5.4. At B oppfyller kravet (f) følger fra forutsetningene og Teorem 5.7. At B oppfyller kravet (g) følger ved hjelp av Teorem 5.8. Endelig ser man at Teorem 5.9 og Teorem 5.11 impliserer at B oppfyller kravene (h) og (i). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 5.2. **QED**.

Teorem 5.12: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Definer B* ved:
$B^* = Mg(<x,y>: x,y\hat{e}Pt(D) \& \emptyset \neq Max(r^*;B,y) \& Max(r^*;B, y)\ Inkl\ x)$
Da har man:
$B=B^*$

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Bevis: Fra Teorem 3.2 følger (1) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D)& ø≠κ(y) & κ(y) Inkl x).
Fra forutsetningene i teoremet har man åpenbart:

(2) B* = Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø ≠ Max(r*;B,y) & Max(r*;B, y) Inkl x)

Fra (1), (2) og Teorem 3.6 følger B=B*. **QED**.

Teorem 5.13: Anta <D,R> er en preordningsstruktur og at <D,B> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R>. Anta videre at <D,R'> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av akseptansestrukturen <D,B>. Da har man at

<D,R> = <D,R'>.

Bevis: Siden <D,B> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R> har man ved hjelp av Definisjon 5.3 at

(1) B= Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

Siden <D,R'> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,B> følger ved hjelp av Definisjon 5.2 at R'=Mg(<x,y>: e;B(x,y) v r;B(x,y)). Men ved hjelp av Teorem 5.10 har man da åpenbart R'=R. Fra dette følger <D,R>=<D,R'>. **QED**.

Teorem 5.14: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Anta <D,R> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,B>. Anta videre at <D,B'> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av preordningsstrukturen <D,R>. Da har man:

<D,B> = <D,B'>

Bevis: Siden <D,R> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,B> har man, i lys av Definisjon 5.2:

(1) R = Mg(<x,y>: e;B(x,y) v r;B(x,y))

Siden det videre forutsettes at <D,B'> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R> har man at

(2) B' = Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

Det følger fra (1) og Definisjon 3.5 at r*;B = R. Fra dette og (2) har vi:

(3) B' = Mg(<x,y>: x,yêPt(D) & ø≠Max(r*;B,y) & Max(r*;B,y) Inkl x)

Men siden <D,B> er en akseptansestruktur følger ved hjelp av Teorem 5.12 at
B = B'. Derfor <D,B>=<D,B'>. **QED**.

La oss avslutte denne paragrafen med de følgende refleksjoner:

La oss som i §4 betegne mengden av alle preordningsstrukturer over domenet D, ie mengden av alle de preordningsstrukturer <D',R> der D'=D, med S(D). La oss betegne mengden av alle akseptansestrukturer over D med H(D). H(D) er altså mengden av alle akseptansestrukturer <D',B> der D'=D. Er x et element i S(D) er x selvfølgelig en preordningsstruktur. Vi betegner da den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av x med h(x). På grunnlag av den definisjonen vi har gitt av den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av en preordningsstruktur fremgår det at h er en funksjon, at domenet til denne funksjonen er S(D) og at h i det minste avbilder S(D) inn i H(D). Kort sagt har vi:

(1) $h: S(D) \rightarrow H(D)$

Likeledes har vi om y er et element i H(D) at y er akseptansestruktur. Vi betegner da den

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

kanoniske preordningsstrukturen bestemt av y med j(y). Det fremgår av den definisjonen vi har gitt av hva som menes med den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av den akseptansestrukturen y at g er en funksjon. Enn mer fremgår det fra det vi har bevist ovenfor at domenet til g er hele H(D) og at g avbilder H(D) i det minste inn i S(D). Vi har derfor:

(2) $j: H(D) \rightarrow S(D)$

Gitt de definisjonene vi nå har gitt kan man ved hjelp av Teorem 5.13 slutte at

(3) $(Ax)(x \hat{e} S(D) \rightarrow j(h(x)) = x)$

Likeledes har man ved hjelp av Teorem 5.14 at

(4) $(Ax)(x \hat{e} H(D) \rightarrow h(j(x)) = x)$

Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes $x1, x2 \hat{e} S(D)$ der $x1 \neq x2$ og hvor man har $h(x1)=h(x2)$. Fra dette og (3) følger $j(h(x1)) = x1$ og $j(h(x2)) = x2$. Men siden $h(x1)=h(x2)$ følger det fra disse to forhold at $x1=x2$ som åpenbart strider mot at $x1 \neq x2$. Det følger derfor at h ikke bare avbilder S(D) inn i H(D), men at den avbilder S(D) en-entydig inn i H(D).

Dette er imidlertid ikke alt. Anta y er et element i H(D). Da følger ved hjelp av (2) at $j(y) \hat{e} S(D)$. Men ved hjelp av (4) har vi $h(j(y))=y$ og derfor $(Ez)(h(z)=y)$. Dette viser at h ikke bare avbilder S(D) inn i H(D), men *på* H(D). Vi kan derfor konkludere med at h er en korrelasjon mellom S(D) og H(D):

(5) $h: S(D) \text{-}(1\text{-}1,på)\rightarrow H(D)$

På en helt tilsvarende måte kan man vise at j avbilder H(D) en-entydig og på S(D). Det følger at j er en korrelasjon mellom H(D) og S(D):

(6) $j: H(D) \text{-}(1\text{-}1,på) \rightarrow S(D)$

Det følger også fra (5) og (6) at $h;\text{-}1 = j$ og at $j;\text{-}1 = h$, med andre ord er j omvendingen av h og h omvendingen av j.

Anta R er en preordning over domenet D. Oppfyller denne preordningen kravet $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} D \rightarrow . R(x,y) \vee R(y,x))$ sier vi at preordningen er total. En preordning som oppfyller dette kravet kalles også for en *preferanserelasjon*. Er <D,R> en preordningsstruktur der R er en preferanserelasjon over D kaller vi <D,R> for en *total preordningsstruktur*. At preordningsrelasjonen R i en preordningsstruktur <D,R> er total innebærer at alle ekvivalensmengdene bestemt av R kan ordnes lineært. I en viss forstand vil derfor en preferanserelasjon, dvs. en total preordning være en mindre kompleks relasjon enn en preordning.

Er på den annen side <D,B> en akseptansestruktur der B oppfyller det følgende krav, nemlig: $(Ax)(Ay)(\eta(x) \& \eta(y) \& x \neq y \rightarrow . \kappa(xUy)=x \vee \kappa(xUy)=y)$ skal vi kalle <D,B> for en *akseptansestruktur over D der den sterke akseptanserelasjonen oppfyller totalitetskravet* eller noe kortere for en *total akseptansestruktur over D*.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Anta nå at <D,R> er en total preordningsstruktur over D. Anta at <D,B> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R>. Det følgende teorem viser da at denne kanoniske akseptansestrukturen også er en total akseptansestruktur over D:

Teorem 5.15: Anta <D,R> er en preordningsstruktur der
(a) $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} D \rightarrow R(x,y) \vee R(y,x))$
Definer B ved
$B = Mg(\langle x,y\rangle: x,y \hat{e} Pt(D) \& \emptyset \neq Max(R,y) \& Max(R,y)\ Inkl\ x)$
Da gjelder:
(i) $(Ax)(Ay)(\eta(x) \& \eta(y) \& x \neq y \rightarrow . \kappa(xUy)=x \vee \kappa(xUy)=y)$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Anta for vilkårlige x,y at
(1) $\eta(x) \& \eta(y) \& x \neq y$. Fra dette og Teorem 5.6 kan man slutte at det finnes $w0,w1 \hat{e} D$ slik at (2) $x = [w0];R \& y = [w1];R$. Siden $x \neq y$ følger det i lys av definisjonen av "[x];R" at (3) $\neg Ekv;R(w0,w1)$. I lys av forutsetningene og Teorem 5.3 kan man, siden $x,y \hat{e} Pt(D)$ følger fra (1) og definisjonen av η, slutte at
(4) $\kappa(xUy) = Max(R, [w0];RU[w1];R)$
Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:
(5) $Max(R, [w0];RU[w1];R) = [w0];R \vee Max(R, [w0];RU[w1];R) = [w1];R$
Siden $w0,w1 \hat{e} D$ følger ved hjelp av forutsetning (a) i teoremet at
(6) $R(w0,w1) \vee R(w1,w0)$
I lys av dette skiller vi mellom to tilfelle:
Tilfelle (i): R(w0,w1). Fra dette,(3) og Teorem 4.2 følger (7) $R^*(w0,w1)$. Vi tar sikte på å bevise den første disjunkten i (5). Det følger da at (5) også holder.
Vi beviser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w at
(8) $w \hat{e} Max(R, [w0];RU[w1];R)$. I lys av definisjonen av Max følger da:
(9) $w \hat{e} [w0];RU[w1];R \& (Av)(v \hat{e} [w0];RU[w1];R \rightarrow R(w,v))$
I lys av (9) er det to muligheter $w \hat{e} [w0];R$. I dette tilfelle holder åpenbart inklusjonen mot høyre. Det andre tilfelle er at $w \hat{e} [w1];R$. Da har vi (10) Ekv;R(w,w1). Siden $w0 \hat{e} [w0];R$ følger ved hjelp av den andre konjunkten i (9) at (11) R(w,w0). Men fra (10) og definisjonen av Ekv;R følger R(w1,w). Dette og (11) impliserer siden R er transitiv at R(w1,w0). Men dette strider mot (7) som impliserer per definisjon at $\neg R(w1,w0)$. Dette tilfellet er derfor utelukket. Det følger at inklusjonen mot høyre i den første disjunkten i (5) holder. La oss så vise inklusjonen mot venstre: Anta derfor for vilkårlig w at
(12) $w \hat{e} [w0];R$. Vi må da vise at (9) holder. Den første konjunkten i (9) følger umiddelbart fra (12). Anta for vilkårlig v at $v \hat{e} [w0];R\ U[w1];R$. Er $v \hat{e} [w0];R$ følger fra dette og (12) at Ekv;R(v,w) og derfor R(w,v). Er $v \hat{e} [w1];R$ har vi Ekv;R(v,w1). Fra (12) følger Ekv;R(w,w0). Fra dette og (7) følger $R^*(w,w1)$ ved hjelp av Teorem 4.1 og fra dette og det at Ekv;R(v,w1) følger ved hjelp av samme teorem at $R^*(w,v)$. Men herav R(w,v). Siden v var vilkårlig følger det at den andre konjunkten i (9) holder. Vi har dermed vist at (9) holder og følgelig at inklusjonen mot venstre i den første disjunkten i (5) holder. Vi har dermed vist at (5) holder i tilfelle R(w0,w1).
Tilfelle (ii): Man har R(w1,w0). I dette tilfellet beviser man at den andre disjunkten i (5) holder på en måte som er helt analog med den vi benyttet i det forrige tilfellet.
Dette viser at satsen holder. **QED**.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Vårt nest teorem viser at dersom <D,B> er en total akseptansestruktur over D og <D,R'> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <D,B> så er <D,R'> også en total preordningsstruktur.

Teorem 5.16: Anta <D,B> er en akseptansestruktur der
(a) $(Ax)(Ay)(\eta(x) \& \eta(y) \& x \neq y \rightarrow . \kappa(xUy)=x \vee \kappa(xUy)=y)$
Da gjelder:
(i) $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} D \rightarrow r^*;B(x,y) \vee r^*;B(y,x))$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta for reduktio ad absurdum at det finnes x,y der (1) $x,y \hat{e} D \& \neg r^*;B(x,y) \& \neg r^*;B(y,x)$. Fra (1) følger i lys av Definisjon 3.5 og Teorem 3.5 at
(2.1) $\neg e;B(x,y)$
(2.2) $\neg r;B(x,y)$ og
(2.3) $\neg r;B(y,x)$
Fra disse tre setningene følger så ved hjelp av Definisjon 3.5, punkt (a) og (b), at
(3.1) $(As)(\eta(s) \rightarrow \neg(x,y \hat{e} s))$
(3.2) $(Aq)(Ar)(\eta(q) \& \eta(r) \& q\Omega r=\emptyset \& x \hat{e} q \& y \hat{e} r \rightarrow \neg(\kappa(qUr)=q))$
(3.3) $(Aq)(Ar)(\eta(q) \& \eta(r) \& q\Omega r=\emptyset \& y \hat{e} q \& x \hat{e} r \rightarrow \neg(\kappa(qUr)=q))$
Fra den første konjunkten i (1), forutsetningen at <D,B> er en akseptansestruktur og Definisjon 3.6 kan man slutte at det må finnes q0 og r0 der vi har:
(4.1) $x \hat{e} q0 \& \eta(q0)$
(4.2) $y \hat{e} r0 \& \eta(r0)$
Hadde vi q0=r0 ville vi da ha $x,y \hat{e} q0 \& \eta(q0)$, men dette strider mot (3.1). Det følger at $q0 \neq r0$ og derfor fra (4.1), (4.2) og Teorem 3.3 at (5) $q0\Omega r0 = \emptyset$. Fra dette, (4.1), (4.2) og (3.2) følger (6) $\neg(\kappa(q0Ur0) = q0)$. På den annen side følger fra (5), (4.1),(4.2) og (3.3) at
(7) $\neg(\kappa(r0Uq0) = r0)$
Men fra (4.1), (4.2), det faktum at $q0 \neq r0$ og forutsetningen (a) kan vi slutte:
$\kappa(q0Ur0) = q0 \vee \kappa(q0Ur0)=r0$
Dette strider imidlertid mot konjunksjonen av (6) og (7). Det følger at det er umulig at det kan finnes x, y som er slik at (1) holder. **QED**.

Vi kalte ovenfor mengden av alle preordningsstrukturer <D',R> der D'=D for mengden av alle preordningsstrukturer over D. Denne mengden betegnet vi med S(D). Tilsvarende betegnet vi mengden av alle akseptansestrukturer over D med H(D). La oss nå betegne mengden av alle totale preordningsstrukturer over D med S*(D) og mengden av alle totale akseptansestrukturer med H*(D). Gitt de definisjonene vi har gitt ovenfor skulle det være klart at S*(D) Inkl S(D) og at H*(D) Inkl H(D).

La nå h være definert som ovenfor. Dette innebærer at dersom $x \hat{e} S(D)$, dvs. x er en preordningsstruktur så vil h(x), som er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av x være en entitet som faktisk er med i H(D). Med andre ord avbilder, som vi allerede har påpekt ovenfor, h mengden av preordningsstruktur over D inn i mengden av akseptansestrukturer over D. Anta nå at x er en preordningsstruktur over D der preordningen i strukturen er total. Da vil h(x) være den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av x. Det fremgår imidlertid fra Teorem 5.15 at h(x) da ikke bare vil være en akseptansestruktur, men også det vi kalte for en total akseptansestruktur . Det følger at h avbilder S*(D) inn i H*(D) og at funksjonen h med

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

domenet begrenset til S*(D) er en funksjon hvis verdiområde er inkludert i H*(D). Mer formelt kan dette uttrykkes slik:

Rest(h,S*(D)): S*(D) → H*(D)

Tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med funksjonen j. Som man husker avbilder j mengden av akseptansestrukturer over D, H(D), en-entydig og på S(D). Fra dette kan man imidlertid ikke uten videre slutte at j avbilder delmengden H*(D) av H(D) en-entydig på delmengden S*(D) av S(D). Anta nå at xêH*(D). Da er x en akseptansestruktur over D som er total i den betydning vi har gjort rede for ovenfor. j(x) vil da være den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av x. Men fra Teorem 5.16 kan man da slutte at j(x) er en preordningsstruktur der preordningen i strukturen er total, med andre ord har man at j(x)êS*(D). Dette innebærer at bildet av H*(D) over j i det minste er inkludert i S*(D). Vi har derfor at den funksjonen som er restriksjonen av j til H*(D) avbilder H*(D) inn i S*(D). Dette kan uttrykkes slik:

Rest(j,H*(D)): H*(D) → S*(D).

Nå er h en en-entydig avbildning fra S(D) over i H(D). Siden S*(D) er inkludert i S(D) følger det at restriksjonen av h til S*(D) også må være en en-entydig avbildning. Det følger at vi kan konkludere med at

Rest(h,S*(D)): S*(D) -(1-1) → H*(D).

På nøyaktig samme innser man at restriksjonen av j til H*(D) avbilder H*(D) en-entydig inn i S*(D). Med andre ord har man:

Rest(j,H*(D)): H*(D) -(1-1)→ S*(D).

Vi skal nå vise at restriksjonen av h til S*(D) avbilder S*(D) på H*(D) og ikke bare inn i H*(D). Anta derfor at x er et vilkårlig element i H*(D). Da har vi fra det vi har vist rett ovenfor at j(x)êS*(D). Men da har vi fra det vi tidligere har vist at h(j(x))=x. Det følger at det finnes yêS*(D) slik at h(y)=x. Et helt tilsvarende resonnement viser at restriksjonen av j til H*(D) ikke bare avbilder H*(D) en-entydig inn i S*(D), men avbilder H*(D) en-entydig og på S*(D). Vi kan oppsummere våre resultater slik:

Rest(h,S*(D)): S*(D) -(1-1,på) → H*(D)
Rest(j,H*(D)): H*(D) -(1-1,på) → S*(D)

Hvis <D,R> er en preordningsstruktur skal vi si at ethvert element starter en uendelig nedadstigende rekke hvis og bare hvis strukturen oppfyller det følgende krav:

(Ax)(xêD → (Ey)(yêD & R*(x,y)))

Man ser at dette kravet impliserer at dersom x er et element i D vil det finnes distinkte elementer x;1, x2. ... ,x;n, ... slik at x=x1 og R*(x;j, x;j+1) for alle jêN & j>=1.

En i visse henseende analog definisjon kan innføres i forbindelse med akseptansestrukturer. Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Har man da yêPt(D) sier vi at y representerer et enkelhetsnivå bestemt av B hvis og bare hvis η(y). Vi skal si at ethvert enkelhetsnivå yêPt(D) i en akseptansestruktur <D,B> starter en uendelig nedadstigende rekke av enkelhetsnivåer hvis og bare hvis man har:

(Ax)(η(x) → (Ey)(η(y) & x≠y & κ(xUy)=x))

Det følgende teorem viser at dersom <D,R> er en preordningsstruktur der hvert element starter en nedadstigende rekke så gjelder det at den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R> er slik at i denne akseptansestrukturen vil ethvert enkelhetsnivå starte en uendelig

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

nedadstigende rekke av enkelhetsnivåer.

Teorem 5.17: Anta <D,R> er en preordningsstruktur der
(a) $(Ax)(x\hat{e}D \rightarrow (Ey)(y\hat{e}D \,\&\, R^*(x,y)))$
Definer B ved
$B = Mg(\langle x,y\rangle: x,y\hat{e}Pt(D) \,\&\, \emptyset \neq Max(R,y) \,\&\, Max(R,y)\ Inkl\ x)$
Da gjelder:
(i) $(Ax)(\eta(x) \rightarrow (Ey)(\eta(y) \,\&\, x \neq y \,\&\, \kappa(xUy)=x))$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi skal vise at (i) holder. Anta derfor for vilkårlig x at (1) $\eta(x)$. Fra dette, forutsetningene og Teorem 5.6 følger at det finnes w der man har
(2) $w\hat{e}D \,\&\, x = [w];R$. Fra den første konjunkten i (2) og forutsetning (a) i satsen kan man slutte at det finnes w' der vi har (3) $w'\hat{e}D \,\&\, R^*(w,w')$. Sett per definisjon
(4) $y0 = [w'];R$. Da har man fra (3) og Teorem 5.6 og det faktum at $y0\hat{e}Pt(D)$ at
(5) $\eta(y0)$. Siden $R^*(w,w')$ følger det at $\neg Ekv;R(w,w')$. Dette faktum samt (2) og (4) impliserer at (6) $x \neq y0$. Det eneste man nå behøver å gjøre for å godtgjøre satsen er å vise at
(+) $\kappa(xUy0) = x$. I lys av Teorem 5.3 vil det være tilstrekkelig å bevise
(++) $Max(R, [w];R\ U\ [w'];R) = [w];R$

Vi tar først for oss inklusjonen mot venstre i (++). Anta derfor for vilkårlig v at
(6.1) $v\hat{e}[w];R$. Da har vi åpenbart (7) $v\hat{e}([w];R\ U\ [w'];R)$. Vi må vise at
(8) $(Ar)(r\hat{e}([w];R\ U\ [w'];R) \rightarrow R(v,r))$.
Fra dette, (7) og definisjonen av Max vil det da følge at $v\hat{e}Max(R, [w];R\ U\ [w'];R)$. Anta derfor $r\hat{e}([w];R\ U\ [w'];R)$ for vilkårlig r. Er $r\hat{e}[w];R$ følger per definisjon av "[w];R" at
(9) $Ekv;R(w,r)$. Fra (6.1) følger videre $Ekv;R(v,w)$. Fra dette og (9) har vi siden Ekv;R er en ekvivalensrelasjon at $Ekv;R(v,r)$ og derfor i lys av definisjonen av Ekv;R at $R(v,r)$. (8) holder derfor i dette tilfellet.

Er på den annen side $r\hat{e}[w'];R$ følger (10) $Ekv;R(w',r)$. Fra (6.1) følger $Ekv;R(v,w)$. Fra dette, (10) og (3) følger ved hjelp av Teorem 4.1 at $R^*(v,r)$. Men herav har vi i lys av definisjonen av R^* at $R(v,r)$. (8) holder derfor også i dette tilfelle

Dermed har vi gitt et bevis for inklusjonen mot venstre i (++).

La oss så bevise inklusjonen mot høyre i (++): Anta for vilkårlig v at
(11) $v\hat{e}Max(R, [w];R\ U\ [w'];R)$ I lys av definisjonen av Max følger fra dette:
(12) $v\hat{e}([w];R\ U\ [w'];R) \,\&\, (Ar)(r\hat{e}[w];R\ U\ [w'];R \rightarrow R(v,r))$
I lys av den første konjunkten er det to muligheter: Enten har man $v\hat{e}[w];R$, eller så har man $v\hat{e}[w'];R$. I det første tilfelle er det trivielt at inklusjonen mot høyre holder. I det andre tilfelle følger (13) $Ekv;R(v,w')$. Fra den andre konjunkten i (12) følger, siden $w\hat{e}[w];R$ og derfor $w\hat{e}[w];R\ U\ [w'];R$ at $R(v,w)$. Fra dette og (13) kan man slutte $R(w',w)$. Men dette strider åpenbart mot (3). Det følger at det er utelukket at $v\hat{e}[w'];R$. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (++) holder.

Vi har dermed vist at (++) holder og kan følgelig konkludere med at satsen holder. **QED**.

Det følgende teorem viser at dersom <D,B> er en akseptansestruktur der ethvert enkelhetsnivå starter en uendelig nedadstigende rekke av enkelhetsnivåer så er den kanoniske

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

preordningsstrukturen bestemt av <D,B> en preordningsstruktur der hvert element starter en uendelig nedadstigende rekke:

Teorem 5.18: Anta <D,B> er en akseptansestruktur der
(a) $(Ax)(\eta(x) \rightarrow (Ey)(\eta(y) \,\&\, x \neq y \,\&\, \kappa(xUy)=x))$
Da gjelder:
(i) $(Ax)(x \hat{e} D \rightarrow (Ey)(y \hat{e} D \,\&\, r;B(x,y))$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Anta for vilkårlig x at (1) $x \hat{e} D$. Siden <D,B> er en akseptansestruktur følger det at B er en sterk akseptanserelasjon. Fra dette, (1) og Definisjon 3.6 følger at det finnes q slik at (2) $\eta(q) \,\&\, q \hat{e} Pt(D) \,\&\, x \hat{e} q$. Fra (2) og (a) følger umiddelbart at det finnes r slik at (3) $\eta(r) \,\&\, q \neq r \,\&\, \kappa(qUr)=q$. Siden $\eta(r)$ har vi i lys av Definisjon 3.4 at $\kappa(r) \neq \emptyset$. Fra dette, Teorem 3.1 og 3.2 har vi $\kappa(r)$ Inkl r. Det følger at $r \neq \emptyset$ og derfor at det finnes v slik at (4) $v \hat{e} r$. Fra den andre konjunkten i (3) og Teorem 3.3 følger (5) $q \Omega r = \emptyset$. Fra (2),(3),(4) og (5) følger:
(6) $\eta(q) \,\&\, \eta(r) \,\&\, q \Omega r = \emptyset \,\&\, x \hat{e} q \,\&\, v \hat{e} r \,\&\, \kappa(qUr)=q$
Fra dette kan man ved hjelp av Definisjon 3.5 slutte at r;B(x,v). Fra dette og det faktum at $v \hat{e} r \hat{e} Pt(D)$ følger $(Ev)(v \hat{e} D \,\&\, r;B(x,v))$. Dette viser at satsen holder. **QED**.

La oss nå betegne mengden av alle preordningsstrukturer over D der hvert element starter en uendelig nedadstigende rekke med S+(D) og mengden av alle akseptansestrukturer der hvert enkelhetsnivå starter en uendelig rekke av nedadstigende enkelhetsnivåer med H+(D). Gitt de definisjonene vi har gitt ovenfor skulle det være klart at S+(D) Inkl S(D) og at H+(D) Inkl H(D).

La nå h være definert som ovenfor. Dette innebærer at dersom $x \hat{e} S(D)$, dvs. x er en preordningsstruktur så vil h(x), som er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av x være en entitet som faktisk er med i H(D). Med andre ord avbilder, som vi allerede har påpekt ovenfor, h mengden av preordningsstruktur over D inn i mengden av akseptansestrukturer over D. Anta nå at x er en preordningsstruktur over D der preordningen i strukturen er slik at den starter en uendelig nedadstigende kjede. Da vil h(x) være den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av x. Det fremgår imidlertid fra Teorem 5.17 at h(x) da ikke bare vil være en akseptansestruktur, men også det vi kalte for en akseptansestruktur der hvert enkelhetsnivå starter en uendelig nedadstigende rekke av enkelhetsnivåer. Det følger at h avbilder S+(D) inn i H+(D) og at funksjonen h med domenet begrenset til S+(D) er en funksjon hvis verdiområde er inkludert i H+(D). Mer formelt kan dette uttrykkes slik:

$$Rest(h,S+(D)): S+(D) \rightarrow H+(D)$$

Tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med funksjonen j. Som man husker avbilder j mengden av akseptansestrukturer over D, H(D) en-entydig og på S(D). Fra dette kan man imidlertid ikke uten videre slutte at j avbilder delmengden H+(D) av H(D) en-entydig på delmengden S+(D) av S(D). Anta nå at $x \hat{e} H+(D)$. Da er x en akseptansestruktur over D der hvert enkelhetsnivå starter en uendelig nedadstigende rekke av enkelhetsnivåer. j(x) vil da være den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av x. Men fra Teorem 5.18 kan man da slutte at j(x) er en preordningsstruktur der hvert element starter en uendelig nedadstigende rekke, med andre ord har man at $j(x) \hat{e} S+(D)$. Dette innebærer at bildet av H+(D) over j i det minste er inkludert i S+(D). Vi har derfor at den funksjonen som er restriksjonen av j til H+(D) avbilder H+(D) inn i S+(D).

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Dette kan uttrykkes slik:

Rest(j,H+(D)): H+(D) → S+(D).

Nå er h en en-entydig avbildning fra S(D) over i H(D). Siden S+(D) er inkludert i S(D) følger det at restriksjonen av h til S+(D) også må være en en-entydig avbildning. Det følger at vi kan konkludere med at

Rest(h,S+(D)): S+(D) -(1-1) → H+(D).

På nøyaktig samme innser man at restriksjonen av j til H+(D) avbilder H+(D) en-entydig inn i S+(D). Med andre ord har man:

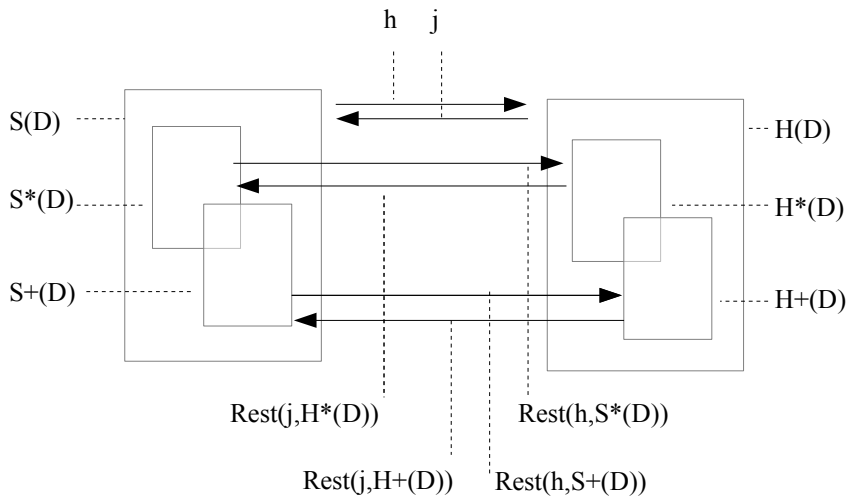
Rest(j,H+(D)): H+(D) -(1-1)→ S+(D).

Vi skal nå vise at restriksjonen av h til S+(D) avbilder S+(D) *på* H+(D) og ikke bare inn i H+(D). Anta derfor at x er et vilkårlig element i H+(D). Da har vi fra det vi har vist rett ovenfor at j(x)êS+(D). Men da har vi fra det vi tidligere har vist at h(j(x))=x. Det følger at det finnes yêS+(D) slik at h(y)=x. Et helt tilsvarende resonnement viser at restriksjonen av j til H+(D) ikke bare avbilder H+(D) en-entydig inn i S+(D), men avbilder H+(D) en-entydig og *på* S+(D). Vi kan oppsummere våre resultater slik:

Rest(h,S+(D)): S+(D) -(1-1,på) → H+(D)
Rest(j,H+(D)): H+(D) -(1-1,på) → S+(D)

De resultatene vi har kommet frem til ovenfor kan oppsummeres i det følgende diagram.

FIGUR



Rektanglet til venstre representerer mengden av alle preordningsstrukturer over D, med andre ord S(D). Rektanglet til høyre representerer mengden av akseptansestrukturer over D, altså H(D). Pilen merket "h" representerer avbildningen h som avbilder S(D) en-entydig og på H(D). Tilsvarende representerer pilen den andre veien den en-entydige avbildningen j av H(D) på S(D). De to overlappende rektanglene innenfor hovedrektanglet til venstre representerer delmengdene S*(D) og S+(D) av mengden S(D). Tilsvarende representerer de to korresponderende rektanglene innenfor hovedrektanglet til høyre de to mengdene H*(D) og S+(D). Som man ser avbilder funksjonen Rest(h,S*(D)) mengden S*(D) en-entydig på H*(D). Dette er antydet ved pilen mot høyre som er merket "Rest(h,S*(D))". Tilsvarende representerer pilen som ligger like under og som er merket "Rest(j, H*(D))" funksjonen

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Rest(j,H*(D)) som avbilder H*(D) en-entydig og på S*(D).

Den femte pilen ovenfra som peker mot høyre og som er merket "Rest(h,S+(D))" representerer naturligvis den funksjonen som er identisk med restriksjonen av h til mengden S+(D). Denne funksjonen har S+(D) som domene og avbilder S+(D) en-entydig inn i og dessuten på H+(D). Den nederste pilen mot venstre, merket "Rest(j,H+(D))" representerer restriksjonen av j til H+(D). Domenet til denne funksjonen er H+(D) og den avbilder H+(D) en-entydig og på S+(D).

Betrakter man det overlappende område mellom de to rektanglene inne i hovedrektanglet til venstre og det tilsvarende overlappende området til høyre representerer disse henholdsvis snittet av S*(D) og S+(D), ie S*(D)ΩS+(D), og snittet av H*(D) og H+(D). Vi har strengt tatt ikke vist ovenfor at h avbilder S*(D)ΩS+(D) på H*(D)ΩH+(D). Heller ikke har vi vist at j avbilder H*(D)ΩH+(D) på S*(D)ΩS+(D). Men dette er egentlig ganske opplagt og kan oppfattes som et forholdsvis enkelt korollar til Teorem 5.15 - Teorem 5.18.

§6 Avslutning

Før vi går videre og avrunder dette arbeidet med å vise hvordan våre resultater ovenfor er relatert til det vi tidligere har skrevet om aksepterbarhet og grad av troverdighet i Rognes [5] finner vi det hensiktsmessig å formulere og bevise ytterligere noen satser.

Den følgende sats angir en viktig egenskap ved en akseptansestruktur <B,D>. Satsen sier at dersom <D,B> er en akseptansestruktur finnes det en såkalt "underliggende" preordning til akseptanserelasjonen B. Vi formulerer satsen på den følgende måte i det vi bruker uttrykket "Pre(R,D)" som forkortelse for "R er en preordning over mengen D":

Teorem 6.1: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Da har man at følgende holder:
(ER)(Pre(R,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))

Bevis: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Da har man at B er en sterk akseptanserelasjon over D. Fra Teorem 3.5 og Definisjon 3.5 følger da at r*;B er en preordning over D. Vi har altså: (1) Pre(r*;B, D). Anta nå for vilkårlige x,y at (2) x,yêPt(D). Siden B er en sterk akseptanserelasjon over D har vi da ved hjelp av Teorem 3.6 at (3) Max(r*;B,y) = κ(y). Fra dette og Teorem 3.2 kan man slutte: B(x,y) ↔ ø≠Max(r*;B,y) Inkl x. Vi har derfor
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠Max(r*;B,y) Inkl))
Fra dette og (1) følger konklusjonen i satsen. **QED**.

Vi har også at det omvendte av Teorem 6.1 holder, nemlig:

Teorem 6.2: Anta D er en ikke-tom mengde og at B Inkl Pt(D)xPt(D). Anta
(ER)(Pre(R,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Da har man at <D,B> er en akseptansestruktur.

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da følger det at det finnes R og D der
(1.1) Pre(R,D) & D≠ø & B Inkl Pt(D)xPt(D) og
(1.2) (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Fra dette følger at (2) <D,R> er en preordningsstruktur. Videre følger fra (1.1) og (1.2) at

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(3) $B = Mg(\langle x,y\rangle: x,y \hat{e} Pt(D) \& \emptyset \neq Max(R,y)\ Inkl\ x)$

Da har man at <D,B> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R>. Fra dette og Teorem 5.2 følger at <D,B> er en aksptansestruktur. **QED**.

Vi bruker "Pref(R,D)" som forkortelse for "R er en preferanserelasjon over D". Vi minner om at en preferanserelasjon R over D er en preordning over D som er total, det vil si at R oppfyller kravet "(Ax)(Ay)(x,yêD → R(x,y) v R(y,x))".

Man har:

Teorem 6.3: Anta <D,B> er en *total* akseptansestruktur. Da har man at følgende holder:
(ER)(Pref(R,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))

Dette teoremet er helt analogt med Teorem 6.1. Man ser at satsen fremkommer fra Teorem 6.1 om man erstatter uttrykket "akseptansestruktur" med "total akseptansestruktur" og uttrykket "Pre(R,D)" med "Pref(R,D)".

Bevis: Anta <D,B> er en akseptansestruktur. Da har man at B er en sterk og total akseptanserelasjon over D. Fra Teorem 3.5 og Definisjon 3.5 følger da at r*;B er en preordning over D. Men siden akseptansestrukturen <D,B> er total har vi også i lys av Teorem 5.16 at r*;B er total. Det følger at r*;B er en preferanserelasjon Vi har altså:
(1) Pref(r*;B, D). Anta nå for vilkårlige x,y at (2) x,yêPt(D). Siden B er en sterk akseptanserelasjon over D har vi da ved hjelp av Teorem 3.6 at (3) Max(r*;B,y) = κ(y). Fra dette og Teorem 3.2 kan man slutte: B(x,y) ↔ ø≠Max(r*;B,y) Inkl x. Vi har derfor
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠Max(r*;B,y) Inkl))
Fra dette og (1) følger konklusjonen i satsen. **QED**.

Den omvendte sats til Torem 6.3 er den følgende:

Teorem 6.4: Anta D er en ikke-tom mengde og at B Inkl Pt(D)xPt(D). Anta videre:
(ER)(Pref(R,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Da har man at <D,B> er en *total* akseptansestruktur.

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da følger det at det finnes R og D der
(1.1) Pref(R,D) & D≠ø & B Inkl Pt(D)xPt(D) og
(1.2) (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Fra dette følger at (2) <D,R> er en preordningsstruktur der vi har:
(1.3) (Ax)(Ay)(x,yêD → R(x,y) v R(y,x))
Videre følger fra (1.1) og (1.2) at
(3) $B = Mg(\langle x,y\rangle: x,y \hat{e} Pt(D) \& \emptyset \neq Max(R,y)\ Inkl\ x)$
Da har man at <D,B> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R>. Fra dette og Teorem 5.2 følger at <D,B> er en aksptansestruktur. Men i lys av Teorem 5.15, (1.3) og (3) har vi da at R også oppfyller kravet:
(Ax)(Ay)(η(x) & η(y) & x≠y →. κ(xUy)=x v κ(xUy)=y)
Det følger at <D,B> er en total akseptansestruktur. **QED**.

Vi definerte tidligere hva vi mente med at en akseptansestruktur var en akseptansestruktur der

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

ethvert enkelhetsnivå startet en uendelig nedadstigende kjede med enkelhetsnivåer. I stedet for å bruke dette lange uttrykket skal vi kalle en slik akseptansestruktur for en *nedadstigende* akseptansestruktur.

Vår neste sats er denne:

Teorem 6.5: Anta <D,B> er en *total nedadstigende* akseptansestruktur. Da har man at følgende holder:

(ER)(Pref(R,D) & (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & R*(x,y))) &
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))

Bevis: Anta <D,B> er en total nedadstigende akseptansestruktur. Da har man at B er en sterk og total akseptanserelasjon over D. Fra Teorem 3.5 og Definisjon 3.5 følger da at r*;B er en preordning over D. Men siden akseptansestrukturen <D,B> er total har vi også i lys av Teorem 5.16 at r*;B er total. Det følger at r*;B er en preferanserelasjon Vi har altså:
(1) Pref(r*;B, D). Siden <D,B> i tillegg er en nedadstigende akseptansestruktur har vi at B oppfyller kravet: (1.1) (Ax)(η(x)→ (Ey)(η(y) & x≠y & κ(xUy)=x)). Men i lys av Teorem 5.18 kan vi da slutte at (1.2) (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & r;B(x,y))
Anta nå for vilkårlige x,y at (2) x,yêPt(D). Siden B er en sterk akseptanserelasjon over D har vi da ved hjelp av Teorem 3.6 at (3) Max(r*;B,y) = κ(y). Fra dette og Teorem 3.2 kan man slutte: B(x,y) ↔ ø≠Max(r*;B,y) Inkl x. Vi har derfor
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠Max(r*;B,y) Inkl))
Fra dette, (1), og (1.2) følger konklusjonen i satsen. **QED**.

Også i forbindelse med denne satsen har vi at den omvendte setningen holder:

Teorem 6.6: Anta D er en ikke-tom mengde og at B Inkl Pt(D)xPt(D). Anta videre:
(ER)(Pref(R,D) & (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & R*(x,y))) &
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Da har man at <D,B> er en *total nedadstigende* akseptansestruktur.

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da følger det at det finnes R og D der
(1.1) Pref(R,D) & D≠ø & B Inkl Pt(D)xPt(D) og
(1.2) (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Fra dette følger at (2) <D,R> er en preordningsstruktur der vi har:
(1.3) (Ax)(Ay)(x,yêD → R(x,y) v R(y,x)) og
(1.4) (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & R*(x,y)))
Videre følger fra (1.1) og (1.2) at
(3) B = Mg(<x,y>: x,yêPt(D)& ø≠ Max(R,y) Inkl x)
Da har man at <D,B> er den kanoniske akseptansestrukturen bestemt av <D,R>. Fra dette og Teorem 5.2 følger at <D,B> er en aksptansestruktur. Men i lys av Teorem 5.15, (1.3) og (3) har vi da at R også oppfyller kravet:
(Ax)(Ay)(η(x) & η(y) & x≠y →. κ(xUy)=x v κ(xUy)=y)
Videre har vi ved hjelp av Teorem 5.17 og (1.4) at R oppfyller kravet:
(Ax)(η(x) → (Ey)(η(y) & x≠y & κ(xUy)=x))
Det følger at <D,B> er en total nedadstigende akseptansestruktur. **QED**.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

De preordningene og preferanserelasjonene som er nevnt i Teorem 6.1 - 6.6 er ikke bare slik at de finnes, de er også entydig bestemt. Man har:

Teorem 6.7: Anta D er en ikke-tom mengde og at B Inkl Pt(D)xPt(D). Anta videre:
(ER)(Pre(R,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))
Da har man:
(E!R)(Pre(R,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x)))

Man bør bemerke at uttrykket "(E!x)F(x)" er definert slik:
(E!x)F(x) ↔. (Ex)F(x) & (Ax)(Ay)(F(x) & F(y) → x=y)

Bevis: Anta forutsetningen i satsen holder. Det vil da være tilstrekkelig å vise at dersom man har:
(1) Pre(R;1,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R;1,y) Inkl x)) og
(2) Pre(R;2,D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R;2,y) Inkl x))
så holder R;1=R;2 for alle R;1, R;2. Anta derfor for reduktio at absurdum at det finnes R;1 og R;2 der (1) og (2) holder, men hvor man ikke desto mindre har at
(3) R;1 ≠ R;2
Da har vi enten <x,y>êR;1 & ¬(<x,y>êR;2) for visse x,yêD eller at det finnes x,yêD der <x,y>êR;2 & ¬(<x,y>êR;1). Vi ser bare på det første tilfelle siden det andre blir helt analogt. Man behøver bare å bytte om R;2 og R;1. Anta derfor at det finnes x,y slik at
(4) <x,y>êR;1 & ¬(<x,y>êR;2)
Fra den siste konjunkten i (4) følger ¬(Ekv;R;2(x,y) v R;2*(x,y)). Dette impliserer
(5) ¬Ekv;R;2(x,y) & ¬R;2*(x,y)
Fra den første konjunkten i (4) følger
(6) Ekv;R;1(x,y) v R;1*(x,y)
Det er nå naturlig å skille mellom to tilfelle og vise at i begge tilfelle kan man utlede en motsigelse.

Tilfelle (i): (7) Ekv;R;1(x,y). Sett per definisjon: (7.1) a={x,y}. Da har man som man lett ser at (8) Max(R;1,a) = {x,y} Inkl {x,y} og (8.2) ø ≠ Max(R;1,a). Merk at det følger fra (4) at (9) x≠y. Fra (8), (8.2) og (1) følger at (10) B(a,a) siden a={x,y}. Det er nå to muligheter når det gjelder påstanden R;2(y,x). Den kan enten være sann eller usann. Vi sondrer derfor mellom to undertilfeller:

Undertilfelle (i1): (11) R;2(y,x). Fra den første konjunkten i (5) følger: ¬(R;2(x,y) &R;2(y,x)). Herav følger (11.1) ¬R;2(x,y) v ¬R2(y,x). Fra dette og (11) kan man slutte: (12) ¬R;2(x,y). Fra dette, (11) og definisjonen av R;2* følger (13) R;2*(y,x). Men da har vi siden a={x,y} at Max(R;2,a)={y} og derfor:
ø≠ Max(R;2,a) Inkl {y}
Fra dette og (2) kan man slutte (14) B({y},a). På den annen side følger det fra (8), siden x≠y, at ¬(ø≠ Max(R;1,a) Inkl {y}. Fra dette og (1) kan man så slutte at ¬B({y},a). Dette strider derfor mot (14). Det følger derfor at dette undertilfellet er utelukket.

Undertilfelle (i2): ¬R;2(y,x). Da følger ¬ (Ekv;R;2(y,x) v R;2*(y,x)). Da
(16) ¬Ekv;R;2(y,x) & ¬R;2*(y,x). Fra dette og (5) følger:
(17) ¬R;2*(x,y) & ¬Ekv;R;2(y,x) & ¬R;2*(y,x)
Dette innebærer at elementene x,y er usammenlignbare med hensyn på R;2. Da har vi at Max(R;2,a)=ø. Det følger da ved hjelp av (2) at ¬(Ez)B(z,a). Men dette strider åpenbart mot

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

(10). Også i dette tilfellet kan vi følgelig utlede en motsigelse.

Siden begge undertilfellene leder til motsigelser følger det at Tilfelle (i) er utelukket.

Tilfelle (ii): (18) R;1*(x,y). Sett per definisjon (19) a= {x,y}. Da har vi i lys av det at x≠y at ø≠ Max(R;1,a) = {x} og derfor i lys av (1), siden {x},a êPt(D), at (20) B({x},a). Som i foregående hovedtilfelle skiller vi nå mellom to undertilfelle alt ettersom man har R;2(y,x) eller ¬R;2(y,x).

Undertilfelle (ii1): R;2(y,x). Da har vi ved et resonnement som er nøyaktig likt det i undertilfelle (i1) at ø ≠ Max(R;2,a) = {y}. Men fra (20) og (2) følger ø≠Max(R;2,a)= {x} som gir oss eklatant motsigelse siden x≠y. Dette tilfellet leder derfor til en motsigelse.

Undertilfelle (ii2): ¬ R;2(y,x). Da kan vi ved et resonnement som er helt identisk med det i undertilfelle (i2) utlede at ¬(Ez)B(z,a). Men dette strider mot (20).

Man ser at begge undertilfellene leder til motsigelse og derfor at også dette tilfellet er utelukket.

Vi konkluderer med at det ikke kan finnes x,y slik at <x,y>êR;1 & ¬(<x,y>êR;2) Ved resonnement som er helt analogt med det vi nå har gjennomført kan man vise at det heller ikke kan finnes x,y der <x,y>êR;2 & ¬(<x,y>êR;1). Det følger at R;1=R;2.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

En helt analog sats gjelder om R er en preferanserelasjon over D eller en preferanserelasjon over D der hvert element i D starter en uendelig nedadstigende kjede:

Teorem 6.8: Anta D er en ikke-tom mengde og B Inkl Pt(D)xPt(D). Sett per definisjon:

(i) f(R,D) ↔. Pref(R,D) &
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x))

(ii) g(R,D) ↔. Pref(R,D) & (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & R*(x,y))) &
(Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x))

Da har man:

(a) (ER)f(R,D) ↔ (E!R)f(R,D)

(b) (ER)g(R,D) ↔ (E!R)g(R,D)

Bevis: La oss forkorte betingelsen

"Pre(R;D) & (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → (B(x,y) ↔ ø≠ Max(R,y) Inkl x))"

med "p(R,D)". Da ser man at vi i beviset for forrige teorem viste:

(1) p(R;1,D) & p(R;2,D) → R;1=R;2 for alle R;1 og R,2

Anta nå at forutsetningene i satsen ovenfor holder.

Ad (a): Det er åpenbart at kondisjonalen mot venstre i (a) holder. Vi behøver derfor bare å bevise kondisjonalen mot høyre. Anta nå for for vilkårlige R;1, R;2 at

(2) f(R;1,D) & f(R;2,D). Siden Pref(R;D) åpenbart impliserer Pre(R;D), enhver preferanserelasjon er en preordning, følger det at f(R,D) impliserer p(R,D). Vi har derfor fra (2) at (3) p(R;1,D) & p(R;2,D). Men fra (3) og (1) følger R;1=R;2. Har vi derfor at (ER)f(R,D) må vi følgelig ha (E!R)f(R,D). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Det er åpenbart at om man har

Pref(R,D) & (Ax)(xêD → (Ey)(yêD & R*(x,y)))

så kan man slutte Pre(R,D). Vi har derfor: (4) g(R,D) → p(R,D) for alle R,D.
Anta nå for vilkårlige R;1,R;2 at (5) g(R;1,D) & g(R;2,D). Det følger da ved hjelp av (4) at p(R;1,D) & p(R;2,D) og derfor ved hjelp av (1) at R;1=R;2. Vi har derfor

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

g(R;1,D) & g(R;2,D) → R;1=R;2 for alle R;1,R2

Fra dette følger i sin tur kondisjonalen mot høyre i (b). Kondisjonalen mot venstre i (b) er opplagt. **QED**.

De satsene vi har gitt bevis for i de tidligere paragrafer er rent mengdeteoretiske satser og hører mer spesielt til den mer generelle teori om preordninger.

I Rognes [5] fremsatte vi imidlertid en teori om en bestemt relasjon, nemlig den relasjon som består mellom to presise deskriptive utsagn x og y hvis og bare hvis x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer all den evidens som kan tas for gitt. I det nevnte arbeid betegnet vi denne relasjonen med "Ba" og innførte den mer uformelle lesemåten "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" for åpne setninger av typen "Ba(x,y)". Vi skal i det følgende kalle denne relasjonen for *den naturlige akseptanserelasjonen* for at man ikke skal blande det sammen med det abstrakte mengdeteoretiske begrepet vi innførte i §3.

Det bør understrekes at teorier om hva som bør aksepteres relativt til en gitt evidens åpenbart ikke er en del av mengdelæren, men snarere en del av erkjennelsesteorien. At man kan bruke satser i mengdelæren for å belyse egenskapene til relasjonen Ba gjør ikke studiet av denne relasjonen til endel av mengdelæren like lite som det at man kan bruke teorien om ellipser for å utdype konsekvensene av Keplers lover gjør disse lovene til grunnsetninger i læren om ellipser.

I Rognes [5] innførte vi også en annen relasjon som består mellom to mulige verdener w og w' hvis og bare hvis verdenen w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w'. Vi betegnet denne relasjonen med R;e og innførte lesemåten "w er enklere enn w' " for formler av typen "R;e(w,w')". Heller ikke denne relasjonen er en relasjon som behandles i mengdelæren. Hvis man hevder at denne relasjonen finnes, at den har bestemte egenskaper og at den er relatert på de og de måter til den naturlige akseptanserelasjonen fremsetter man en teori som hører til metafysikken og ontologien. Det er ikke en teori som kan utledes fra den rene predikatlogikkens og mengdelærens grunnsetninger.

Hovedformålet med det vi har å si i det følgende er å relatere de satser vi har bevist ovenfor om akseptansestrukturer og preordninger til de teoriene om den naturlige akseptanserelasjonen og enkelhetsrelasjonen som ble fremlagt i vårt arbeid "Aksepterbarhet og troverdighetsgrad", Rognes [5]

For å kunne gjøre dette på en tilstrekkelig utvetydig og tydelig måte finner vi det hensiktsmessig å omtale en del begreper som vi har innført og definert presist i tidligere arbeider, men også i Rognes [5].

I det følgende betegner "L;e" det predikatlogiske språket med identitet som kun inneholder de to ikke-logiske predikatene "x er en mengde" og "x er et element i mengden y". Er Δ en mengde med ikke-logiske predikater betegner "L;e(Δ)" språket L;e utvidet med predikatene i Δ. I det følgende skal vi kalle de predikatene som er karakteristiske for den utsagnsteorien som er beskrevet i Rognes [5] for de utsagnsteoretiske predikatene. Disse er de følgende: "x er et presist deskriptivt utsagn", "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant" og "x er en mulig verden". Videre skal vi kalle de følgende predikater for de egenskapsteoretiske predikatene. Disse er: " x er en egenskap av grad y", "x er har egenskapen y i verdenen w" og "x er et mulig individ". Mengden av predikater som

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

inneholder de utsagnsteoretiske og egenskapsteoretiske predikatene *pluss* predikatet "x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer all evidens" betegner vi her med "Δ;1". Predikatet "x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer all evidens" forkorter vi med "Ba(x,y)". Ingen andre predikater enn dem som er nevnt inngår i Δ;1

Mengden av predikater som inneholder de utsagns- og egenskapsteoretiske predikatene pluss predikatet "x er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y" skal vi betegne med "Δ;2". Vi forkorter det sistnevnte predikat med uttrykket "En(x,y)".

La oss nå bemerke at ZFC;u(L;e(Δ)), der Δ er en eller annen predikatmengde, er den predikatlogiske teorien med identitet hvis aksiomer er alle de logiske og mengdeteoretiske aksiomene[2] i L;e(Δ) og hvis slutningsregler utelukkende er modus ponens og universell generalisering. Er Γ en eller annen mengde med lukkede i L;e(Δ) betegner ZFC;u(L;e(Δ))[Γ] den predikatlogiske teorien ZFC;u(L;e(Δ)) utvidet med formlene i Γ som nye ikke-logiske aksiomer.

Vi har i tidligere arbeider spesifisert de utsagnsteoretiske aksiomene U1 - U4 og de egenskapsteoretiske aksiomene E1 - E7. Vi betegner den mengden med formler i L;e(Δ;1) som inneholder disse elleve formlene med "θ;0". Den teorien vi derfor i første omgang vil ta vårt utgangspunkt i er ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0]. Språket til denne teorien inneholder, som man ser fra det vi har skrevet ovenfor, predikatet "Ba(x,y)", men som det skulle fremgå av definisjonen av ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] inneholder ikke denne teorien noen aksiomer som sier noe som helst om egenskapene til relasjonen Ba. Dersom man derfor skal få en teori som sier noe om denne relasjonen må man derfor supplere teorien med ytterligere aksiomer.

Vi skal nå se på et knippe slike aksiomer om relasjonen Ba og sammenligne de teorier man får når disse legges til ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] med de teoriene som ble beskrevet og undersøkt i Rognes [5].

La oss på dette punkt nevne at vi i det følgende forutsetter at leseren er fullt fortrolig med arbeidene Rognes [1], [2], [3] og [4]. Begrepsdannelser og definisjoner som er brukt i disse arbeidene vil bli brukt her uten spesielle forklaringer. Vi nevner imidlertid at I betegner mengden av mulige verdener, U, mengden av utsagn og μ den en-entydige funksjon som avbilder mengden av utsagn en-entydig og på Pt(I) og som er slik at dersom x er et utsagn så er μ(x) det vi kaller sannhetsmengden til utsagnet x, det vil si mengden av alle de mulige verdener der utsagnet x er sant.

Det første aksiomet vi angir er det følgende. Det sier at Ba er en relasjon mellom utsagn. Vi betegner dette med a1:

a1 $\quad Ba(x,y) \rightarrow x,y\hat{e}U$

Siden U, mengden av utsagn er definert ved hjelp av de predikater som inngår i utsagnsteorien, og som er med i Δ;1 følger det selvfølgelig at a1 er en formel i L;e(Δ;1). Det skulle også være klart at a1 ikke kan utledes i ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0].

De tre neste aksiomene vi skal se på er også formler i L;e(Δ;1). Først innfører vi

2 Med de mengdeteoretiske aksiomene har vi her i tankene ZFC;u-aksiomene i L;e(Δ). For en helt presis avgrensning av disse aksiomene, samt en definisjon av selve systemet ZFC;u(L;e(Δ)), kan man konsultere Rognes [2].

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

imidlertid en definisjon:

Definisjon 6.1 $Ba^* = Mg(<\mu(x),\mu(y)>: Ba(x,y))$

Man ser raskt at definiens i denne definisjonen er et uttrykk i L;e(Δ;1) og at Ba* er en relasjon som er inkludert i Pt(I). Det følger at dersom man har Ba*(x,y) for visse entiteter x,y så er x,y mengder av mulige verdener.

Vi betrakter nå de følgende aksiomer:

c1 <Ba*,I> er en akseptansestruktur
c2 <Ba*,I> er en total akseptansestruktur
c3 <Ba*,I> er en total akseptansestruktur der hvert enkelhetsnivå starter en uendelig kjede av nedadstigende enkelhetsnivåer.

Hvis man ser på definisjonen vi tidligere har gitt av uttrykket "akseptansestruktur" skulle det umiddelbart fremgå at c1 kan ekspanderes ved hjelp av denne definisjonen og tidligere definisjoner til en formel i språket L;e(Δ;1). Nøyaktig det samme gjelder aksiomene c2 og c3.

Vi kaller teorien vi får når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvides med aksiomene a1 og c1 for C1. Tilsvarende er C2 teorien som fremkommer når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvides med a1 og c2. Endelig kaller vi teorien ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvidet med a1 og c3 for C3.

Etter at vi nå har definert de tre teoriene C1, C2 og C3 kan det være instruktivt å se på tre andre teorier som i en viss forstand svarer til disse tre. Vi finner det først hensiktsmessig å minne om visse begrepsdannelser. I det følgende bruker vi "Pre(R,D)" som forkortelse for det lengere uttrykket "R er en preordning over mengden D". Dette uttrykket har vi, som man sikkert husker, definert tidligere. La oss videre bruke "Pref(R,D)" som forkortelse uttrykket "R er en preferanserelasjon over mengden D". Dette begrepet kan som vi har sett defineres i strengt mengdeteoretiske termer. Vi gir den formelle definisjonen:

Definisjon 6.2 $Pref(R,D) \leftrightarrow . R \text{ Inkl } DxD \;\&\; (Ax)(Ay)(x,y \hat{e} D \rightarrow . R(x,y) \vee R(y,x)) \;\&\; (Ax)(Ay)(Az)(R(x,y) \;\&\; R(y,z) \rightarrow R(x,z))$

De følgende aksiomer "løper parallelt" med c1 - c3. Vi ser først på:

d1 $(ER)(Pre(R,I) \;\&\; (Ax)(Ay)(x,y \hat{e} Pt(I) \rightarrow (Ba^*(x,y) \leftrightarrow \emptyset \neq Max(R,y) \;\&\; Max(R,y) \text{ Inkl } x)))$

Dette akiomet sier at det finnes en preordning som i en viss forstand er "underliggende" til akseptanserelasjonen Ba*. Som man ser fra det vi har vist tidligere, Teorem 6.7, er denne preordningsrelasjonen entydig bestemt. Det finnes en og bare en R som oppfyller betingelsen etter eksistenskvantoren i d1.

Det neste aksiomet vi skal betrakte er dette:

d2 $(ER)(Pref(R,I) \;\&\; (Ax)(Ay)(x,y \hat{e} Pt(I) \rightarrow (Ba^*(x,y) \leftrightarrow \emptyset \neq Max(R,y) \;\&\; Max(R,y) \text{ Inkl } x)))$

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Dette aksiomet sier at det finnes en preferanserelasjon som er underliggende til akseptanserelasjonen Ba*. Dette aksiomet er naturligvis sterkere enn d1 og impliserer det sistnevnte aksiomet.

Det tredje aksiomet av denne typen som vi vil betrakte er:

d3 $(ER)(Pref(R,I)$
$\quad \& (Ax)(x\hat{e}I \rightarrow (Ey)(y\hat{e}I \,\&\, R(x,y) \,\&\neg R(y,x)))$
$\quad\quad \& (Ax)(Ay)(x,y\hat{e}Pt(I) \rightarrow$
$\quad\quad\quad (Ba^*(x,y) \leftrightarrow \; \emptyset \neq Max(R,y) \,\&\, Max(R,y)\ Inkl\ x)))$

Som man ser uttrykker denne formelen det samme som d2 bortsett fra at man også krever av den preferanserelasjonen som hevdes å eksistere at denne er slik at enhver verden er utgangspunktet for en uendelig nedadstigende R-kjede.

Vi kaller teorien ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvidet med a1 og d1 som nye ikke-logiske aksiomer for D1. Utvider man ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] med a1 og d2 skal vi kalle den reulterende teori for D2. Tilslutt er D3 den teorien man får når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvides med a1 og d3 som nye ikke-logiske aksiomer.

Man ser at teoriene C1, C2 og C3 i en viss forstand svarer til henholdvis teoriene D1, D2 og D3. Man har at C1 er svakere enn C2 som i sin tur er svakere enn C3. Det samme forhold gjelder for D1 - D3.

Man kan vise at C1 - C3 er ekvivalente med henholdsvis D1 - D3. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 6.9: (Ekvivalensteorem) Anta $\alpha \hat{e} Fm(L;e(\Delta;1))$. Da gjelder følgende:

(a) $C1 \vdash \alpha \;\leftrightarrow\; D1 \vdash \alpha$

(b) $C2 \vdash \alpha \;\leftrightarrow\; D2 \vdash \alpha$

(c) $C3 \vdash \alpha \;\leftrightarrow\; D3 \vdash \alpha$

Beviset for denne sats er strengt tatt ganske enkelt. Vi utelater likevel detaljene. Punkt (a) kan bevises ved hjelp av Teorem 6.1 og 6.2. Tilsvarende ser man at (b) holder i lys av Teorem 6.3 og Teorem 6.4. Når det gjelder punkt (c) kan dette bevises ved hjelp av Teorem 6.5 og Teorem 6.6. Det bør i denne forbindelse noteres at Teorem 6.1 - 6.6 alle er rent mengdeteoretiske satser som kan utledes i ZFC;u(L;e(Δ;1)) og derfor også i teoriene C1 - C3 samt teoriene D1 - D3.

La oss nå vende blikket mot språket L;e(Δ;2). Som man husker var Δ;2 den mengden av predikater som inneholdt alle de utsagns- og egenskapsteoretiske predikatene samt predikatet "En(x,y)" som vi leste "x er en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen y". Vi skal kalle den relasjonen som betegnes av "En" for enkelhetsrelasjonen.

I språket L;e(Δ;2) ser vi på de følgende formler:

e0 $En(x,y) \rightarrow x,y\hat{e}I$

e1 $(Ax)(x\hat{e}I \rightarrow\ En(x,x))$

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

e2 En(x,y) & En(y,z) → En(x,z)
e3 (Ax)(Ay)(x,yêI →. En(x,y) v En(y,x))
e4 (Ax)(xêI → (Ey)(yêI & En(x,y) & ¬En(y,x)))

La oss bemerke at vi per definisjon setter R;e=Mg(<x,y>: En(x,y)). Videre setter vi per definisjon R;e* = Mg(<x,y>: En(x,y) & ¬En(y,x)). Har vi derfor w,w'êI og at R;e*(w,w') følger det at w er en mulig verden som har større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn verdenen w'. Endelig setter vi per definisjon: Ekv;e =Mg(<x,y>: En(x,y)&En(y,x)). Dette impliserer at Ekv;e(w,w') betyr at w og w' har den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. Utfra lesemåten til konstruksjonen En virker e0 - e2 som helt innlysende riktige påstander. Derimot kan man ikke si at e3 og e4 har den samme grad av evidens. Hvis noe taler til fordel for e3 og e4 må det i så fall være overveielser av en mer systematisk, indirekte og teoretisk natur.

Vi skal kalle teorien ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] utvidet med aksiomene e0 - e2 for E2. Den teorien som resulterer når ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] utvides med e0, e1, e2, og e3 som nye ikke-logiske aksiomer kaller vi for E2. Tilslutt betegner vi teorien ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] utvidet med alle disse formlene, med andre ord e0 - e4, som nye ikke-logiske aksiomer med E3.

Teoriene E1 - E3 korresponderer naturligvis med teoriene D1 - D3 og C1 - C3.

Siden predikatet "Ba(x,y)" ikke er med i predikatmengden Δ;2 kan man ikke umiddelbart sammenligne teoriene D1 og E1. Det samme gjelder teoriparet D2, E3 og paret D3, C3.

Vi kan imidlertid lett definere, ved induksjon på lengden av formler i L;e(Δ;1), en transformasjon φ som avbilder Fm(L;e(Δ;1)) inn i Fm(L;e(Δ;2))[3]. Dette kan gjøres på følgende vis: Er P et n-ært predikat i L;e(Δ;1) som er forskjellig fra Ba setter vi φ(P(x1,...,x;n)) = P(x1,...,x;n). Er α en formel i L;e(Δ;1) setter vi φ(¬α) = ¬φ(α). Er a et binært setningslogisk konnektiv i L;e(Δ;1) setter vi φ(αaβ) = φ(α)aφ(β). Er Q enten allkvantoren eller eksistenskvantoren setter vi φ((Qx)α) = (Qx)φ(α). Endelig fikserer vi φ for atomære setninger av typen Ba(x,y) ved å sette:

(+) φ(Ba(x,y)) = x,yêU & ø≠ Max(R;e,μ(y)) & Max(R;e, μ(y)) Inkl μ(x)

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av transformasjonen φ. Man kunne ha definert denne transformasjonen litt mindre formelt ved å si at dersom α er en formel i L;e(Δ;1) så er φ(a) den formelen som fremkommer når man erstatter alle forekomster av atomære formler av typen Ba(x,y) med den formelen som står til høyre i "ligningen" (+) rett ovenfor.

Det man nå kan vise er at det følgende teorem holder:

Teorem 6.10: Anta αêFm(L;e(Δ;1)). Da gjelder:
(a) D1 |- α → E1 |- φ(α)
(b) D2 |- α → E2 |- φ(α)
(c) D3 |- α → E3 |- φ(α)

3 Er L et predikatlogisk språk betegner "Fm(L)" mengden av alle de velformede formlene i L. "CFm(L)" betegner mengden av alle de lukkede formlene i L.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Det dette teoremet sier er at teorien D1 kan intepreteres inn i teorien E1 og tilsvarende når det gjelder D2 og D3. Disse kan intepreteres inn i heholdsvis teorien E2 og teorien E3. Vi kan altså utlede alle teoremene i teorien D1 i teorien E1 om denne suppleres med definsjonen:

$$Ba(x,y) \leftrightarrow x,y\hat{e}U \;\&\; \emptyset \neq Max(R;e,\mu(y)) \;\&\; Max(R;e,\mu(y))\ Inkl\ \mu(x)$$

Transformasjonen φ avbilder $Fm(L;e(\Delta;1))$ inn i $Fm(L;e(\Delta;2))$. Man kan på tilsvarende vis definere en avbildning ψ som går den andre veien. Dette gjøres etter samme mønster som ovenfor: Er P et n-ært predikat i $L;e(\Delta;2)$ som er forskjellig fra En setter vi $\psi(P(x1,...,x;n)) = P(x1,...,x;n)$. Er α en formel i $L;e(\Delta;2)$ setter vi $\psi(\neg\alpha) = \neg\psi(\alpha)$. Er a et binært setningslogisk konnektiv i $L;e(\Delta;2)$ setter vi $\psi(\alpha a\beta) = \psi(\alpha)a\psi(\beta)$. Er Q enten allkvantoren eller eksistenskvantoren setter vi $\psi((Qx)\alpha) = (Qx)\psi(\alpha)$. Endelig fikserer vi ψ for atomære setninger av typen En(x,y) ved å sette:

$$(+)\quad \psi(En(x,y)) = x,y\hat{e}I \;\&\; r^*;Ba^*(x,y)^4$$

Det er nå ikke vanskelig å vise i lys av det vi tidligere har vist om relasjonen r*;B i en akseptansestruktur <D,B> at følgende holder:

Teorem 6.11: Anta $\alpha\hat{e}Fm(L;e(\Delta;2))$. Da gjelder:

(a) $E1 \vdash \alpha \rightarrow C1 \vdash \psi(\alpha)$
(b) $E2 \vdash \alpha \rightarrow C2 \vdash \psi(\alpha)$
(c) $E3 \vdash \alpha \rightarrow C3 \vdash \psi(\alpha)$

Et enkelt korollar til Teorem 6.9 og 6.11 er dette:

Teorem 6.12: Anta $\alpha\hat{e}Fm(L;e(\Delta;2))$. Da gjelder:

(a) $E1 \vdash \alpha \rightarrow D1 \vdash \psi(\alpha)$
(b) $E2 \vdash \alpha \rightarrow D2 \vdash \psi(\alpha)$
(c) $E3 \vdash \alpha \rightarrow D3 \vdash \psi(\alpha)$

Teoremene 6.10 - 6.12 viser at E1 kan intepreteres inn i D1 og og omvendt. De to teoriene er derfor i det vesentlige ekvivalente. Tilsvarende viser de satsene vi har nevnt at E1 kan intepreteres inn i C1 og at det omvendte også holder. Det samme gjelder teoriene E2, D2 og C2, og forøvrig E3, D3 og C3.

Det er nå på sin plass å relatere og sammenligne det vi har skrevet ovenfor med de teoriene som ble presentert i første del av vårt arbeid "Aksepterbarhet og troverdighetsgrad", Rognes [5]. Vi avgrenset der språket $L;e(\Delta;1)$ og tok i dette arbeid vårt utgangspunkt i teorien $ZFC;u(L;e(\Delta;1))[\theta;0]$ som vi har beskrevet ovenfor. Språket til en stor del av de teoriene som ble presentert i Rognes [5] er derfor helt identisk med språket til teoriene C1-C3 og D1-D3. I språket $L;e(\Delta;1)$ formulerte vi i alt fjorten aksiomer. Det dreide seg om formlene B1 - B14 som ble presentert i §5 og §6 i Rognes [5]. Av disse ble aksiomene B1 - B12 presentert i §5 og B13 og B14 i §6. Når det gjelder de sistnevnte aksiomene er B13 og B14 i alt vesentlig de sammen aksiomene som henholdsvis d2 og d3 som vi har nevnt ovenfor. Dessuten er B2 den

4 Når det gjelder definisjonen av r*;B(x,y) kan man studere Definisjon 3.5 i §3.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

samme formelen som vi ovenfor kalte aksiom a1.

I Rognes [5] betraktet vi eksplisitt den teorien som fremkommer når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvides med formlene B1 - B12 som nye ikke-logiske aksiomer. I det nevnte arbeid ble denne teorien betegnet med "B;1". Videre betraktet vi teorien som fremkommer når man legger aksiomene B2 og B14 til ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] som nye ikke-logiske aksiomer. Denne teorien ble i Rognes [5] betegnet med "B;1*". Siden a1 er identisk med aksiomet B2, og aksiomet B14 er ekvivalent med d3, har man som man skjønner at teorien B;1* er ekvivalent med teorien D3 som vi definerte ovenfor. Bruker vi uttrykket "Th(T)" for å betegne mengden av teoremer i teorien T har man derfor at Th(B;1*)=Th(D3).

I det nevnte arbeid viste vi også at teorien B;1 er ekvivalent med teorien B;1*. Det følger fra dette og de resultater vi har kommet frem til ovenfor at teorien B1 i Rognes [5] er ekvivalent med teoriene C3 og D3 som vi har beskrevet ovenfor. Siden det ikke umiddelbart er opplagt at B;1 er ekvivalent med C3 er det et rimeligvis et resultat som bør beskrives som interessant.

Den teorien vi får når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvides med B1 - B9 samt B11 og B12 som nye ikke-logiske aksiomer ga vi ikke noe egent navn i Rognes [5]. Her skal vi betegne den med med B;1-. Den korresponderende teorien som fremkommer når ZFC;u(L;e(Δ;1))[θ;0] utvides med B2 og B13 skal vi betegne med "B;1-*". I Rognes [5] beviste vi i realiteten, men skrev ikke beviset eksplisitt opp, at B;1- og B;1-* er ekvivalente, med andre at Th(B;1-) = Th(B;-*). Det skulle være opplagt ved nærmere inspeksjon at aksiomet B13 i det vesentlige er ekvivalent med aksiomet d2 som vi nevnte ovenfor. Vi har derfor at teorien B;1-* er ekvivalent med teorien D2. Vi har derfor Th(D2) = Th(B;1-*). Det følger i lys av det vi har vist ovenfor at

Th(C2) =Th(D2) = Th(B;1-*) = Th(B;1-)

La oss nå oppsummere det vi så langt har funnet ut. Vi har i Rognes [5] undersøkt i alt fire teorier om akseptanserelasjonen Ba. Dette var for det første teoriene B;1 og B;1* som vi i dette arbeidet viste at var ekvivalente. Vi fant at B;1* var ekvivalent med D3 og derfor med C3. Alle disse fire teoriene er derfor ekvivalente. Vi har følgelig:

(+) Th(B;1) = Th(B;1*) = Th(D3) = Th(C3)

Dessuten fant vi i Rognes [5] ut at teorien B;1- er ekvivalent med teorien B;1-* og at denne siste teorien i sin tur er ekvivalent med D2. Ovenfor viste vi at D2 og C2 er ekvivalente. Disse resultatene kan derfor sammenfattes slik:

(++) Th(B;1-) = Th(B;1-*) = Th(D2) = Th(C2)

Vi har ovenfor sett at C3 er en teori som er sterkere enn teorien C2 som i sin tur er sterkere enn teorien C1. Det samme gjelder "D-familien" av teorier. Fra dette følger at alle teoriene i (+) er sterkere enn dem som er nevnt i (++). Siden det ikke er noen direkte opplagt ting at C3 er ekvivalent med B;1 eller at C2 er ekvivalent med B;- kan vi derfor konkludere med at vi har utdyppet ytterligere hva som følger fra de akseptanseteoriene som ble studert i den første delen av vårt arbeid "Akseptanse og troverdighetsgrad".

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

I §8 i Rognes [5] formulerer vi de aksiomene som ble kalt e0, ... ,e4 ovenfor, men under andre navn.[5] Aksiomet e1 nevnes ikke eksplisitt i Rognes [5]. I det nevnte arbeid betraktes så den teorien man får når ZFC;u(L;e(Δ;2))[θ;0] utvides med aksiomene e0, e2, e3 og e4. I Rognes[5], §8, betegnes denne teorien med B;2. Siden man lett ser at e3 impliserer e1, siden enhver relasjon som er total også er refleksiv, ser man at denne teorien B2 er ekvivalent med den teorien vi ovenfor kalte for E3. Teorien E1 betraktes ikke eksplisitt i Rognes[5], bare en variant som fremkommer når man legger til definisjonen:

Ba = Mg(<x,y>: x,yêU & Max(R;e,μ(y)≠ø & Max(R;e,μ(y)) Inkl μ(x))

Heller ikke den teorien som vi betraktet ovenfor og som der ble kalt E2, med andre ord den teorien som postulerer at enkelhetsrelasjonen er en preferanserelasjon og intet mer, blir eksplisitt betraktet i Rognes [5]. Vi viser ikke der helt åpenlyst at denne teorien er ekvivalent med B;1- eller B;1-* selvom beviset ligger ganske oppe i dagen. I Rognes [5] viser vi heller ikke at E1 eller den varianten som nevnes er ekvivalent med teoriene D1 og C1. Dette er en svakhet i det nevnte arbeid fordi det ikke er noen opplagt sak at enkelhetsrelasjonen nødvendigvis er total og at enkelhetsnivåene derfor kan ordnes lineært. Derimot er man på helt trygg grunn om man bare hevder at denne relasjonen er refleksiv og transitiv, med andre ord en preordning. Vi har derfor med introduksjonen av E1 og E2, og det at vi har vist at E1 er ekvivalent med D1 og C1 og at E2 er ekvivalent med D2 og C2 slik det fremgår av teoremene 6.9 - 6.12 fylt igjen en rekke "tomrom" i Rognes [5]. Dette innebærer at vi har gitt en mer fyldig oversikt over hvilke teorier som fornuftigvis kan tas i betraktning på dette felt og vist tydeligere hvordan de er relatert til hverandre.

5 e0 betegnes En0, e3 går under navnet En1, e2 under navnet En2 og e4 under navnet En4. I Rognes [5] opererer vi også med aksiomet En3 som er den følgende formel:

Ba(x,y) ↔ . x,yêU & Max(R;e,μ(y)≠ø & Max(R;e,μ(y)) Inkl μ(x)

Her er R;e definert ved R;e=Mg(<w,w'>: En(w,w')). Det bør bemerkes at En3 ikke er en formel i L;e(Δ;2), men i L;e(Δ;1UΔ;2) om predikatmengdene Δ;1 og Δ;2 defineres slik vi har gjort det her.

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Referanser

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes

Referanser

Hansson [1]	Hansson, Bengt, *Choice structures and preference relations*, Synthese 18 (1968), pp 443 - 458
Hansson [2]	Hansson, Bengt, *An Analysis of Some Deontic Logics*, Noûs, Vol III, no 4, November 1969
Rognes [1]	Rognes, Morten, *Om notasjonen som benyttes i mine arbeider*, Maskinskrevet manuskript, 2008
Rognes [2]	Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4]	Rognes, Morten, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [5]	Rognes, Morten, *Aksepterbarhet og troverdighetsgrad ,* Maskinskrevet manuskript, 2013

Copyright © 2016 Morten Harboe Rognes